Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

15. Übungsblatt
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020

Alle Aufgaben und Teilaufgaben, die nicht als „schriftlich" gekennzeichnet werden, sind Votieraufgaben.

15.1. (a) Schreiben Sie die gegebenen Permutationen als Produkt disjunkter Zykel und berechnen Sie jeweils ihr Vorzeichen:

i. $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 9 & 5 & 2 & 1 & 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$;

ii. $\beta = (1\,2)(2\,4\,7)(3\,8\,5)$;

iii. $\gamma = (1\,3\,2\,4\,6)(6\,7)(1\,2\,5\,7)(1\,3\,6)$.

(b) Sei $\pi = (a_1\, a_2 \ldots a_t) \in S_n$ ein Zykel der Länge t und sei $\sigma \in S_n$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sigma\pi\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\,\sigma(a_2)\ \ldots\ \sigma(a_t)).$$

(c) Sei $\mu = (1\,2\,3)(4\,5\,6)(7\,8)$ und $\nu = (4\,3\,7)(1\,6\,8)(2\,5)$. Bestimmen Sie eine Permutation $\sigma \in S_8$ mit $\sigma\mu\sigma^{-1} = \nu$. Wieviele andere Permutationen in S_8 haben dieselbe Eigenschaft wie σ?

15.2. Zeigen Sie, dass für den Rang von $A \in M_n(\mathbb{R})$ gilt: $r(A) = r(A^T A)$. Gilt dies auch für Matrizen $A \in M_n(\mathbb{C})$?

15.3. Sei K ein Körper und $A = (a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in M_n(K)$ eine invertierbare Matrix mit den Spalten $a_1, \ldots, a_n$. Für jedes $b \in K^n$ hat das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ die eindeutige Lösung $x = A^{-1}b$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel, dass die i-te Komponente von x durch $(\det A)^{-1} \cdot \det(a_1, ..., a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ gegeben ist.

(b) Verwenden Sie die Cramersche Regel und Determinanten, um das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ zu lösen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

15.4. Sei K ein Körper. Wir erlauben die folgenden Zeilenoperationen auf Matrizen in $M_n(K)$:

- Vertauschen zweier verschiedener Zeilen und gleichzeitiges Multiplizieren einer beliebigen Zeile mit -1.
- Multiplizieren einer Zeile mit einer Konstanten $0 \neq \alpha \in K$ und gleichzeitiges Multiplizieren einer weiteren Zeile mit α^{-1}.
- Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

Zeigen Sie:

(a) Keine dieser Operationen verändert die Determinante, das heißt, ist $A \in M_n(K)$ eine Matrix und $B \in M_n(K)$ die durch Anwendung einer der Operationen entstandene Matrix, so gilt $\det A = \det B$.

(b) Jede invertierbare Matrix $A \in M_n(K)$ lässt sich durch Anwendung dieser Zeilenumformungen in eine Diagonalmatrix der Form $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, d)$ bringen mit $d = \det A$.

15.5. Seien $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in K$. Bestimmen Sie die Determinante

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} - xI_n\right) = \det\begin{pmatrix} -x & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -x & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} - x \end{pmatrix}.$$

15.6. Sei K ein Körper und $A, B \in M_n(K)$. Sei A *nilpotent*, das heißt, es gibt eine natürliche Zahl $m \geq 1$ mit $A^m = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $I_n - A$ invertierbar ist mit $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \ldots + A^{m-1}$.

(b) Bestimmen Sie alle $\lambda \in K$, für die es einen Vektor $0 \neq x \in K^n$ gibt mit $Ax = \lambda x$.

(c) Sei $B - I_n$ nilpotent. Bestimmen Sie alle $\lambda \in K$, für die es einen Vektor $0 \neq x \in K^n$ gibt mit $Bx = \lambda x$.