Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

Vortragsübung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020
8.11.2019

Diskussion studentischer Lösungen zu folgenden Aufgaben:

V1.1. Aufgabe (Elementare Zahlentheorie).
Eine natürliche Zahl n heißt perfekt, wenn sie gleich der Summe all ihrer Teiler ist, das heißt falls

$$n = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}, \\ k|n \,\wedge\, k \neq n}} k$$

gilt. Prüfen Sie, ob eine natürliche Zahl n von der Form $n = 2^k\left(2^{k+1}-1\right)$ mit $k \in \mathbb{N}$ perfekt ist, falls $p := 2^{k+1} - 1$ eine Primzahl ist.

Negativ-Beispiel einer Lösung:

n perfekt $\quad n = 2^k\left(2^{k+1}-1\right) \quad k \in \mathbb{N}$

$2^{k+1} - 1 = p \quad$ Primzahl

q ist ein Faktor von n

$q = 2^i, 2^i p$

$$n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k + p + 2p + 2^2p + \ldots + 2^{k-1}p$$
$$= \left(2^{k+1}-1\right) + \left(2^k - 1\right)p$$

nach Definition von p $\; = p + \left(2^k - 1\right)p = 2^k p = n$

Mögliche falsche Interpretation des Negativ-Beispiels:

Falls $\quad n$ perfekt $\quad$ ist, dann gilt $\quad n = 2^k\left(2^{k+1}-1\right) \;\; \forall \;\; k \in \mathbb{N}$.

Somit folgt $\quad 2^{k+1} - 1 = p \quad$ für jede $\quad$ Primzahl $\quad p$.

Dann ist jedes $\quad q \;\; \in \mathbb{N} \quad$ ist ein Faktor von n .

Es folgt $\quad q = 2^i, 2^i p \;\;$. $\quad$ Somit ergibt sich

$$n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k + p + 2p + 2^2p + \ldots + 2^{k-1}p$$
$$= \left(2^{k+1}-1\right) + \left(2^k - 1\right)p \; ,$$

nach Definition von p $\; = p + \left(2^k - 1\right)p = 2^k p = n \;$. $\quad$ Also ist n perfekt.

Korrektur des Negativ-Beispiels:

Behauptung: Eine natürliche Zahl

$n \;$ ist $\;$ perfekt $\;$, $\;$ falls $\quad n = 2^k\left(2^{k+1}-1\right) \quad$ gilt für ein $\quad k \in \mathbb{N}$

und $\quad 2^{k+1} - 1 = p \quad$ eine $\quad$ Primzahl $\quad$ ist.

Beweis: $\quad$ Angenommen $\quad q \;\; \in \mathbb{N} \quad$ ist ein Faktor von n ,

dann ist $\quad q = 2^i$, $\quad$ oder $q = \;\; 2^i p \;$.

$$\sum_{k|n \,\wedge\, k \neq n} k \qquad \cancel{n} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k + p + 2p + 2^2p + \ldots + 2^{k-1}p$$
$$= \left(2^{k+1}-1\right) + \left(2^k - 1\right)p \quad \text{, nach Definition von } p$$

~~nach Definition von p~~ $\; = p + \left(2^k - 1\right)p = 2^k p = n \;$. $\quad$ Also ist n perfekt.

V1.2. Aufgabe (Mengenlehre).
Sei M eine Menge und $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge. Seien $T_i \subset M$ Teilmengen von M für $i \in I$. Beweisen Sie die de Morganschen Regeln

(M1) $M \backslash \bigcup\limits_{i \in I} T_i = \bigcap\limits_{i \in I} (M \backslash T_i)$,

(M2) $M \backslash \bigcup\limits_{i \in I} T_i = \bigcap\limits_{i \in I} (M \backslash T_i)$.

Negativ-Beispiel einer Lösung:

$$x \in M \backslash \bigcup_{i \in I} T_i \qquad \begin{aligned} & x \notin \bigcup_{i \in I} T_i = \{\exists i \in I : m \in T_i\} \\ & x \notin T_i \quad \Longrightarrow \quad x \in M \backslash T_i \\ & x \in \bigcap_{i \in I} (M \backslash T_i) = \{\forall i \in I : m \in M \backslash T_i\} \end{aligned}$$

Mögliche falsche Interpretation des Negativ-Beispiels:

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} x \in M \backslash \bigcup_{i \in I} T_i \quad & \Longrightarrow \quad x \notin \bigcup_{i \in I} T_i = \{\exists i \in I : m \in T_i\} \\ & \Longrightarrow \quad \exists i \in I \ : \ x \notin T_i \quad \Longrightarrow \quad \exists i \in I \ : \ x \in M \backslash T_i \\ & \Longrightarrow \quad x \in \bigcap_{i \in I} (M \backslash T_i) = \{\forall i \in I : m \in M \backslash T_i\} \end{aligned}$$

Korrektur des Negativ-Beispiels:

Behauptung: Es gilt die Mengengleichheit $M \backslash \bigcup\limits_{i \in I} T_i = \bigcap\limits_{i \in I} (M \backslash T_i)$.

Beweis: Für $x \in M$ gilt:

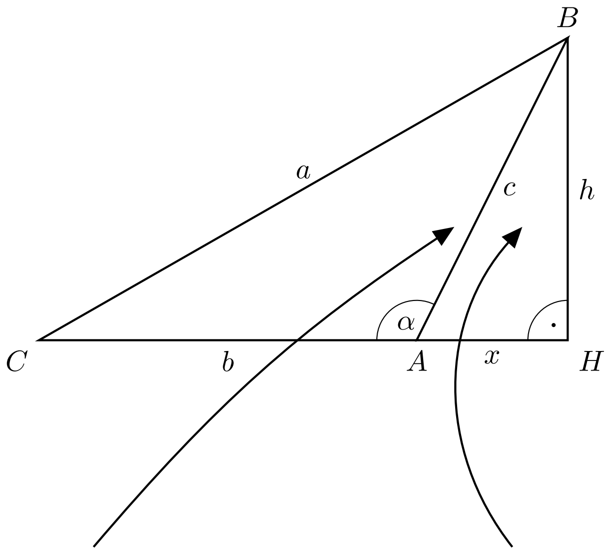
$$\begin{aligned} x \in M \backslash \bigcup_{i \in I} T_i \quad & \Longleftrightarrow \quad x \in M \quad \text{und} \\ & \qquad\quad x \notin \bigcup_{i \in I} T_i \overset{\text{Def.}}{=} \{ \ m \in M \ \mid \ \exists i \in I : m \in T_i\} \\ & \Longleftrightarrow \quad x \in M \quad \text{und} \quad \neg \ (\ \exists i \in I : m \in T_i \ ) \\ & \Longleftrightarrow \quad x \in M \quad \text{und} \quad \forall i \in I \ : \ x \notin T_i \quad \cancel{\Longrightarrow \quad x \in M \backslash T_i} \\ & \Longleftrightarrow \quad \forall i \in I \ : \ x \in M \backslash T_i \\ & \Longleftrightarrow \quad x \in \bigcap_{i \in I} (M \backslash T_i) \overset{\text{Def.}}{=} \{ \ m \in M \ \mid \ \forall i \in I : m \in M \backslash T_i\} \ . \end{aligned}$$

Somit gilt die de Morgansche Regel (M1). Analog lässt sich (M2) beweisen.

V1.3. Aufgabe (Elementare Geometrie).
Beweisen Sie den Kosinussatz: Sei ein Dreieck durch die Ecken A, B und C gegeben und die jeweils gegenüberliegenden Seiten mit a, b und c bezeichnet. Weiterhin bezeichne α den Innenwinkel des Dreiecks ΔABC an der Ecke A. Dann gilt die Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)\ .$$

Negativ-Beispiel einer Lösung:



ΔHBC

$a^2 = (b+x)^2 + h^2$

$a^2 = b^2 + 2bx + \underbrace{x^2 + h^2}$

ΔHAB

$c^2 = x^2 + h^2$

$a^2 = b^2 + 2bx + c^2$

Subst.

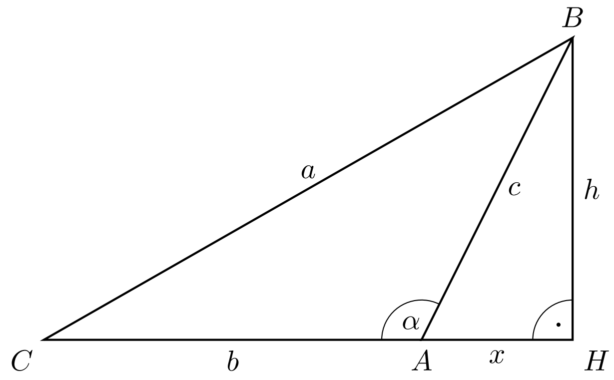
$\dfrac{x}{c} = \cos(180° - \alpha)$

$x = -b\cos(\alpha)$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

Korrektur des Negativ-Beispiels:

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: Die Höhe im Dreieck ΔABC von B auf die Seite b wird im Folgenden mit h bezeichnet und der zugehörige Höhenfußpunkt mit H. Sei weiter x die Länge der Strecke $\overline{AH}$. Zur Veranschaulichung dient nachfolgende Skizze:



Im Dreieck ΔHBA gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$c^2 = x^2 + h^2 \ . \tag{I}$$

Ebenfalls im Dreieck ΔHBA gilt mit der Definition des Kosinus und elementaren Äquivalenzumformungen

$$\begin{aligned} & \frac{x}{c} = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha) \\ \iff \quad & x = -c\cos(\alpha) \ . \end{aligned} \tag{II}$$

Im Dreieck ΔHBC gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$a^2 = (b+x)^2 + h^2 = b^2 + 2bx + x^2 + h^2 \ . \tag{III}$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (I) und (II) in Gleichung (III) erhalten wir

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \ .$$

Damit wurde der Kosinussatz bewiesen.

Weiteres Aufgabenmaterial aus Logik und Mengenlehre:

V1.4. Aufgabe (Aussagelogik).

Prüfen Sie, ob folgender Satz eine Aussage ist.

Dieser Satz ist nicht wahr.

V1.5. Aufgabe (Mengenlehre - Russellsche Antinomie).

Zeigen Sie, dass durch folgende Vorschrift keine Menge definiert wird:

$$K := \{M | M \text{ ist eine Menge und } M \notin M\} \ .$$

Besprechung der schriftliche Aufgaben vom 1. und 2. Übungsblatt

1.2. Schriftliche Aufgabe Eine natürliche Zahl $p \geq 2$ heißt *Primzahl*, falls sie nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Wenn 2 ungerade ist, dann ist es eine Primzahl.

(e) Wenn 2 gerade ist, dann ist es eine Primzahl.

1.4. Schriftliche Aufgabe

(b) Bilden Sie die Negation der folgenden Aussagen:

(i) Es gibt Elefanten, die sprechen können.

(ii) Es existiert ein $x \in \mathbb{Q}$ so, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x = \frac{n}{m}$.

(iii) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \exists n_2 \in \mathbb{N} : 2^x = 2n_1n_2$.

1.5. Schriftliche Aufgabe* Zeigen Sie:

(b) Wenn n eine natürliche Zahl ist, dann ist $n(n+1)$ gerade.

(d) Wenn n und m natürliche Zahlen sind, dann ist $n^{m+1} + n^m$ gerade.

2.1. Schriftliche Aufgabe* Gegeben sind die folgenden beiden Aussagen für $a, b, c \in \{2, 7\}$:

(1) Falls a ungerade ist, dann ist b gerade.

(2) Falls b ungerade ist, dann sind a und c gerade.

Nehmen Sie an, dass eine der beiden Aussagen wahr und die andere falsch ist. In welchem Fall gibt es eine Lösung? Ist diese eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.3. Schriftliche Aufgabe * Sei X eine Menge und seien A, B, C, D Teilmengen von X. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

(d) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

(g) $A \cup B = A \cap B \iff A = B$

2.4. Schriftliche Aufgabe Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Betrachten Sie das Produkt

$$p_n := \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

(a) Berechnen Sie p_2, p_3, p_4 und p_5.

(b) Vermuten Sie eine Formel für p_n als einen Bruch und zeigen Sie diese dann induktiv.