Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

Vortragsübung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020
05.02.2020

V11.1. Aufgabe. Seien V_1 und V_2 endlich dimensionale Vektorräume über einem Körper K und $f : V_1 \longrightarrow V_2$ eine lineare Abbildung. Sei $\mathcal{B}_j$ eine Basis von V_j für $j = 1, 2$.

(a) Zeigen Sie, dass der Rang von $M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(f)$ und $r(f)$ übereinstimmen.

(b) Zeigen Sie, dass der Defekt von $M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(f)$ und $n(f)$ übereinstimmen.

(c) Zeigen Sie, dass f ein Vektorraumisomorphismus ist genau dann, wenn $\dim V_1 = \dim V_2$ und $\det(M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(f)) \neq 0$ sind.

Aufgaben zu Determinanten

V11.2. Aufgabe. Bestimmen Sie die Determinante der folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(x) & 0 & -\sin(x) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(x) & 0 & \cos(x) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} * & * & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & c & d \\ e & f & 0 & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V11.3. Aufgabe. Bestimmen Sie die Koeffizienten von a^6 und b^6 in $\det C$ wobei

$$C = \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b & 1 & a \\ b & a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Es ist nicht notwendig, $\det C$ *explizit zu berechnen.*

V11.4. Aufgabe. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und K ein Körper. Sei $\lambda \in K$, $a = (a_1, a_2, \dots a_n)^T \in K^n$ und $B(n, \lambda, a)$ die Matrix

$$B(n, \lambda, a) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & \lambda + a_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\det B(n, \lambda, a) = \lambda^n + \sum_{j=1}^n \lambda^{n-j} a_j$.

V11.5. Aufgabe. Wir definieren $\binom{j}{0} = 1$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A_n \in M_n(\mathbb{Q})$ die Matrix, deren (i, j)-Eintrag $\binom{j+i-2}{i-1}$ ist. Zeigen Sie, dass $\det A_n = 1$.