Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

Vortragsübung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020
06.02.2020

Catch-Up & Wunschkasten

12.6 Votieraufgabe Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und U_1, U_2 Unterräume von V.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : U_1 \times U_2 \to U_1 + U_2$ mit $\varphi((u_1, u_2)) = u_1 + u_2$ ein Vektorraumisomorphismus ist, falls $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$ ist. Was lässt sich über die Abbildung φ sagen, falls $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ ist?

(b) Sei $V = U_1 \oplus U_2$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(U_1, W)$ und $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(U_2, W)$ Vektorräume über $\mathbb{K}$ sind. Zeigen Sie, dass es einen Vektorraumisomorphismus von $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ nach $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(U_1, W) \times \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(U_2, W)$ gibt.

V12.1. Aufgabe.

(a) Seien $m \leq n$ natürlichen Zahlen und $\pi = (a_1\, a_2\, \cdots a_m)$ ein m-Zyklus in S_n. Zeigen Sie, dass $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{m-1}$.

(b) Schreiben Sie die Permutation $\sigma \in S_{10}$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 10 & 2 & 9 & 3 & 8 & 6 & 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

als Produkt von disjunkten Zyklen und bestimmen Sie das Vorzeichen von σ.

V12.2. Aufgabe. Sei $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung gegeben durch

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a + b\mathtt{i} & b\mathtt{i} - c \\ c + a & a + b\mathtt{i} \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathcal{B}$ die angeordnete Standardbasis von $\mathbb{C}^3$ und $\mathcal{C}$ die angeordnete Basis von $M_2(\mathbb{C})$ mit Vektoren E_{11}, E_{12}, E_{21} und E_{22}. Sei $\mathcal{D} = (D_1, D_2, D_3, D_4)$ die angeordnete Basis von $M_2(\mathbb{C})$, für die die Basiswelchselmatrix von $\mathcal{C}$ zu $\mathcal{D}$ gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

(b) Bestimmen Sie den Rang und den Defekt von f.

(c) Sei $X \in M_2(\mathbb{C})$ mit $X = 2D_1 + D_2 - D_3 + 3D_4$. Bestimmen Sie die Menge aller $v \in \mathbb{C}^3$, für die $f(v) = X$ gilt.

V12.3. Aufgabe. Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $f = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ in $\mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$ gibt, welches A als Nullstelle hat, also mit

$$f(A) = a_r A^r + a_{r-1} A^{r-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie Potenzen von A.