Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

Vortragsübung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020
13.11.2019

Aufgaben zur vollständigen Induktion:

V2.1. Aufgabe. Wir betrachten die Aussage A : „Alle Pferde haben dieselbe Farbe.“.

Entscheiden Sie, ob das folgende Argument logisch korrekt ist und ob es beweist, dass A wahr ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

....

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $B(n)$ die Aussagenform:

$B(n)$: „Alle Pferde in einer Herde von n Pferden haben dieselbe Farbe.“

Offensichtlich haben alle Pferde in einer Herde von einem Pferd dieselbe Farbe. Anders gesagt: $B(1)$ ist wahr.

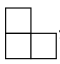
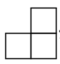
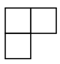
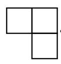
Nehmen Sie an, dass $B(n)$ gilt, für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Betrachen Sie eine beliebige Herde H von $n+1$ Pferden. Seien p und q unterschiedliche Pferde in H. Nach der Induktionsvoraussetzung haben alle Pferde in $H \setminus \{p\}$ dieselbe Farbe f. In ähnlicher Weise haben alle Pferde in $H \setminus \{q\}$ dieselbe Farbe. Da $H \setminus \{p, q\} \subseteq H \setminus \{q\}$ gilt und alle Pferde in $H \setminus \{p, q\} \subseteq H \setminus \{p\}$ die Farbe f besitzen, haben alle Pferde in $H \setminus \{q\}$ die Farbe f. Das Pferd p gehört zu $H \setminus \{q\}$, hat also die Farbe f. Da alle Pferde in $H \setminus \{p\}$ die Farbe f haben, folgt, dass alle Pferde in H die Farbe f haben.

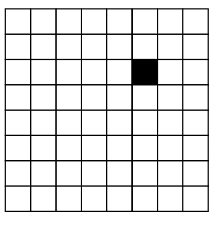
Folglich gilt $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil es nur endlich viele Pferde gibt, ist Aussage A wahr.

V2.2. Aufgabe. Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ die Summe der Innenwinkel eines konvexen n-Ecks $(n-2)180°$ ist.

V2.3. Aufgabe. Zeigen Sie: Jede Landkarte, deren Ländergrenzen Geraden bilden, kann durch zwei Farben (schwarz und weiß) so gefärbt werden, dass Länder mit einer gemeinsamen Grenze nicht gleich gefärbt sind.

V2.4. Aufgabe. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ jedes Schachbrett mit $2^n \times 2^n$ Feldern, bei dem ein Feld markiert ist, überlappungsfrei mit L-Stücken bedeckt werden kann, sodass nur das markierte Feld frei bleibt. Hierbei überdeckt ein L-Stuck genau drei Felder in den Lagen

, ,  oder .



$2^3 \times 2^3$ Schachbrett mit markierten Feld

V2.5. Aufgabe. Zeigen Sie: Jeder glatte Betrag größer 7 kann so mit Geldscheinen im Wert von 3 und 5 bezahlt werden, dass man kein Wechselgeld erhält.

V2.6. Aufgabe. Die *Fibonaccizahlen* sind induktiv definiert als $f_1 := 1$, $f_2 := 1$ und $f_{n+2} := f_n + f_{n+1}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$.

(a) $\sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$

(b) $\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n f_{n+1}$

(c) $f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$

(d) $f_{m+n+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1}$

V2.7. Aufgabe (Übungsblatt 2, Aufgabe 6; Induktion vs andere Methoden). Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Gegeben ist die Gleichung $G_{m,n}$ von der Form $x_1 + \cdots + x_m = n$ für die Variablen $x_i \in \mathbb{N}_0$. Sei $l_{m,n}$ die Anzahl der Lösungen von $G_{m,n}$.

(a) Zeigen Sie, dass $l_{m,1} = m$ und $l_{1,n} = 1$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

(b) Nehmen Sie an, dass

$$l_{m,n+1} = \frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!} \text{ und } l_{m+1,n} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

für fest gewählte $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $l_{m+1,n+1} = \frac{(n+m+1)!}{(n+1)!m!}$.

(c) Kann man aus den Teilen (a) und (b) folgern, dass

$$l_{m,n} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Beobachten Sie, dass $\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} = \binom{n+m-1}{n}$ und betrachten Sie die kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass $l_{m,n} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$.