Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

Vortragsübung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020
27.11.2019

Aufgaben zum größten gemeinsamen Teiler und modulo Rechnen

3.2 Schriftliche Aufgabe Der *größte gemeinsame Teiler* (ggT) zweier ganzer Zahlen a und b mit $(a,b) \neq (0,0)$ ist eine natürliche Zahl m mit der Eigenschaft, dass sie Teiler sowohl von a als auch von b ist und dass jede ganze Zahl, die ebenfalls a und b teilt, ihrerseits Teiler von m ist. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $q \in \mathbb{Z}$ gilt: $\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(b, a - qb)$.

(b) Nehmen Sie an, dass der Euklidische Algorithmus auf das Paar (a,b) angewandt wird. Wie in der Vorlesung seien die Reste bei der wiederholten Division mit Rest durch r_i bezeichnet, für $0 \leq i \leq n+1$, wobei n maximal ist mit $r_n \neq 0$. Nutzen Sie Teil (a) um zu zeigen, dass $r_n = \mathrm{ggT}(a,b)$ ist.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(1980, 2184)$ mittels des Euklidischen Algorithmus, sowie $x, y \in \mathbb{Z}$, für die die Gleichung $1980x + 2184y = \mathrm{ggT}(1980, 2184)$ gilt.

V4.1. Aufgabe. Es ist $\mathrm{ggT}(41, 87) = 1$ mit $1 = (-8) \cdot 87 + 17 \cdot 41$ und $87 = 3 \cdot 29$.

(a) Hat $\overline{17}$ im Ring $\mathbb{Z}_{87}$ ein multiplikatives Inverses?

(b) Hat $\overline{3}$ im Ring $\mathbb{Z}_{87}$ ein multiplikatives Inverses?

(c) Hat $\overline{29}$ im Ring $\mathbb{Z}_{87}$ ein multiplikatives Inverses?

(d) Hat $\overline{41}$ im Ring $\mathbb{Z}_{87}$ ein multiplikatives Inverses?

(e) Was ist $\overline{87}$ im Standardrepräsentantensystem von $\mathbb{Z}_{17}$? Hat $\overline{87}$ im Ring $\mathbb{Z}_{17}$ ein multiplikatives Inverses?

(f) Was ist $\overline{87}$ im Standardrepräsentantensystem von $\mathbb{Z}_{41}$? Hat $\overline{87}$ im Ring $\mathbb{Z}_{41}$ ein multiplikatives Inverses?

In allen Fällen, falls das multiplikative Inverse existiert, bestimmen Sie dieses.

Aufgaben zu Mächtigkeit und Äquivalenzrelationen

3.7. Schriftliche Aufgabe Für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ definieren wir die Relation R auf $\mathbb{R}^2$ durch xRy, wenn $\max\{|x_1|, |x_2|\} = \max\{|y_1|, |y_2|\}$.

(a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen von $(0,0)$, $(-1,0)$ und $(2,-3)$ in der reellen Ebene.

V4.2. Aufgabe. Sei A eine nicht-leere Menge. Zeigen Sie, dass die Menge aller Äquivalenzrelationen auf A gleichmächtig ist zur Menge aller Partitionen von A.

Aufgaben zu Primzahlen

3.4. Schriftliche Aufgabe [Euklids Charakterisierung von Primzahl] Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Nehmen Sie an, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: Teilt n das Produkt $a \cdot b$, dann teilt n auch a oder b. Zeigen Sie, dass n eine Primzahl ist. Erfüllen alle Primzahlen diese Eigenschaft? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

V4.3. Aufgabe. Es gibt unendlich viele Primzahlen p, für die $p \bmod 4 = 3$ gilt.
Es gibt unendlich viele Primzahlen p, für die $p \bmod 3 = 2$ gilt. Siehe Aufgabe 3.5.

Hinweis: Unter Unständen wird die Vortragsübung durch weitere Aufgaben zu einem späteren Zeitpunkt ergänzt.