Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

Vortragsübung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020
11.12.2019

Aufgaben zu Gruppen und Körpern

V6.1. Aufgabe. Beweisen Sie, dass die Menge $H = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ zusammen mit der Verknüpfung $a \star b := a + b - ab$ für $a, b \in H$ eine abelsche Gruppe definiert.

V6.2. Aufgabe. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit genau 4 Elementen. Sei $0 \in \mathbb{K}$ das neutrale Element der Addition und $1 \in \mathbb{K}$ das neutrale Element der Multiplikation. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Es ist $1 + 1 \neq 0$.

(b) Es gibt $a \in \mathbb{K}$, sodass $\{0, 1, a, a + 1\} = \mathbb{K}$.

(c) Es gilt $x = -x$ für alle $x \in \mathbb{K}$.

Aufgaben zu Vektorräumen und Unterräumen

V6.3. Aufgabe. Sei $V :=]0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Zeigen Sie, dass V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, mit Vektoraddition definiert durch $x \boxplus y := xy$ und Skalarmultiplikation gegeben durch $\alpha \boxdot x := x^\alpha$ für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

V6.4. Aufgabe. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und X eine nicht-leere Menge. Sei $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{K})$ die Menge aller Abbildungen von X nach $\mathbb{K}$. Für $f, g \in \mathrm{Abb}(X, \mathbb{K})$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ definieren wir die Abbildungen $f + g$ und $\alpha \cdot f$ durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$ für alle $x \in X$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Abb}(X, \mathbb{K}), +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

(b) Sei $X = \mathbb{N}$. Ist $V := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \mid f(n + 2) = f(n) + f(n + 1)\, \forall n \in \mathbb{N}\}$ ein Unteraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$? Ist $W := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \mid \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \neq 0\} \text{ ist endlich}\}$ ein Unteraum von $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{K})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

V6.5. Aufgabe. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Seien W_1 und W_2 Unterräume von V. Zeigen Sie, dass $W_1 \cup W_2$ genau dann ein Unterraum von V ist, wenn $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$ ist.