Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

Vortragsübung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020
08.01.2020

Aufgaben zu Matrizen und Inversen

7.5 Schriftliche Aufgabe. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement 1, sei $\lambda \in R$, seien m, n und p natürliche Zahlen und seien $A, B \in M_{n\times p}(R)$ und $D \in M_{m\times n}(R)$ Matrizen mit Einträgen in R. Zeigen Sie:

(b) $D(A+B) = DA + DB$

(c) Für $a \in R$ gilt $(-1)\cdot a = -a$; insbesondere folgt $(-1)A = -A$.

8.8 Schriftliche Aufgabe. Gegeben seien die Matrizen mit reellen Einträgen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sind A bzw. B invertierbar? Falls ja, bestimmen Sie die Inverse, und schreiben Sie diese als Produkt von Elementarmatrizen.

Aufgaben zu Untervektorräumen und Basen

9.6 Schriftliche Aufgabe. Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen Unterräume des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathbb{C}^3$ sind. Begründen Sie Ihre Antworten. Wir schreiben aus Platzgründen $(a,b,c)^T$ für den Spaltenvektor mit den Einträgen a, b, c.

(a) $U_1 = \{(a,b,c)^T \in \mathbb{C}^3 : \frac{a+b}{\mathtt{i}} = 2c\}$,

(b) $U_2 = \{(a,b,c)^T \in \mathbb{C}^3 : a + 2b - c = \mathtt{i}\}$,

(c) $U_3 = \{(a,b,c)^T \in \mathbb{C}^3 : a^2 - \mathtt{i}c^2 = 0\}$.

V7.1. Aufgabe (V6.4). Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{K}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $(\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{K}),+,\cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Hierbei definieren wir die Abbildungen $f+g$ und $\alpha\cdot f$ durch $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ und $(\alpha\cdot f)(x) = \alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$, für $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Sei weiterhin

$$\begin{aligned} V &:= \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{K}) \mid f(n+2) = f(n) + f(n+1)\, \forall n \in \mathbb{N}\}, \\ W &:= \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{K}) \mid \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \neq 0\} \text{ ist endlich}\}. \end{aligned}$$

Ist V beziehungsweise W ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{K})$? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

V7.2. Aufgabe. Sei $V := \mathbb{R}^n$ und $v \in V$ fest gewählt. Nach Aufgabe 9.4 ist V mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} &\boxplus : V \times V \to V : (x,y) \mapsto x \boxplus y := x + y - v \\ &\boxdot : \mathbb{R} \times V \to V : (\alpha, y) \mapsto \alpha \boxdot x := \alpha(x - v) + v \end{aligned}$$

ein reeller Vektorraum.

(a) Sei $A \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix mit $Av = 0$. Prüfen Sie, ob $U_1 := \{x \in V | Ax = 0\}$ ein Unterraum von V ist.

(b) Sei $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix mit $Bv = v$. Zeigen Sie, dass $U_2 := \{x \in V | Bx = v\}$ ein Unterraum von V ist.

Sei nun $n = 3$, $v := (1, -1, 2)^T$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Vektoren $(1, 1, 0)^T$, $(0, 0, 2)^T$, $(1, 1, 2)^T$ linear unabhängig sind in V. Welche Dimension hat V?

(d) Bilden die Vektoren $(0, 1, -2)^T$, $(2, -3, 6)^T$,$(1, -1, 2)^T$ ein Erzeugendensystem von U_2? Bilden Sie eine Basis von U_2? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(e) Geben Sie eine Basis B_{U_2} von U_2 an und ergänzen Sie diese zu einer Basis B_V von V.

(f) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor des Vektors $(1, 2, 6)^T$ bezüglich der Basis B_V.

V7.3. Aufgabe. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K der Dimension n. Eine Hyperebene H von V ist ein Unterraum $H \leq V$ der Dimension $n - 1$. Zeigen Sie

(a) Sind $H_1, \ldots, H_s$ Hyperebenen von V, so gilt $\dim(H_1 \cap \ldots \cap H_s) \geq n - s$.

(b) Ist $U \leq V$ ein Unterraum der Dimension s, so gibt es Hyperebenen $H_1, \ldots, H_{n-s}$ mit $U = H_1 \cap \ldots \cap H_{n-s}$.