Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

Vortragsübung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020
15.01.2020

Klausurtraining

V8.1. Aufgabe (teilweise 2. Scheinklausur LAAG 1, 2017/2018).

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) .$$

i. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{L}$ und seine Dimension.

ii. Geben Sie eine Basis des Spaltenraumes von A an.

iii. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $f(x) = Ax$, für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass f weder injektiv noch surjektiv ist.

(b) Seien n, m natürliche Zahlen und $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Sei $m < n$. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $Bx = 0$ eine nicht-triviale Lösung hat, also eine Lösung $x \neq 0$. Was lässt sich über die Anzahl der Lösungen von $Bx = c$ sagen, für $c \in \mathbb{R}^m\backslash\{0\}$?

V8.2. Aufgabe (teilweise Scheinklausur LAAG 1, 2018/2019). Sei $\mathbb{R}_2[x]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Sei $p_i := x^i \in \mathbb{R}_2[x]$ für $i = 0, 1, 2$. Wir definieren eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ durch $\varphi(q) := (q(0), q(2))^T \in \mathbb{R}^2$, für alle $q \in \mathbb{R}_2[x]$.

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist.

(b) Sei $f := x^2 - 2x \in \mathbb{R}_2[x]$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\{f\})$ gilt. Ist φ surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie, dass $B := \{f, p_0, p_1\}$ eine Basis von $\mathbb{R}_2[x]$ ist.

(d) Schreiben Sie den Vektor $g := 2x^2 + x - 3$ als Linearkombination der Vektoren in B.

V8.3. Aufgabe (Modulprüfung LAAG 1, 2015/2016). Sei $M_3(\mathbb{R})$ der Vektorraum der 3×3-Matrizen mit reellen Einträgen. Sei $S \in M_3(\mathbb{R})$ invertierbar.

(a) Zeigen Sie, dass $U := \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid S^{-1}AS \text{ ist eine Diagonalmatrix}\}$ ein Unterraum von $M_3(\mathbb{R})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$, $A \mapsto S^{-1}AS$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

(c) Sei W der Unterraum der Diagonalmatrizen von $M_3(\mathbb{R})$. Geben Sie eine Basis B_W von W an. Geben Sie eine Basis B_U von U an.

V8.4. Aufgabe (Scheinklausur LAAG 1, 2018/2019). Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Seien $\varphi, \psi : V \to V$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie: Ist $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, so gilt $\varphi(\mathrm{Ker}(\psi)) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$ und $\varphi(\mathrm{im}(\psi)) \subseteq \mathrm{im}(\psi)$.