Anne Henke
Teresa Conde
Arne Geyer

Vortragsübung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2019/2020
22.01.2020

Aufgaben zu Basen und linearen Abbildungen

V9.1. Aufgabe. Sei $K_n[x]$ der Vektorraum der Polynome vom Grad n oder kleiner über einem Körper K. Seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ (nicht notwendiger Weise verschieden). Sei weiter

$$S := \left\{ s_i := x^i \middle| i \in \{0, 1, \ldots, n\} \right\} ,$$
$$B := \left\{ b_i := \prod_{j=1}^{i} (x - x_j) \middle| i \in \{0, 1, \ldots, n\} \right\} .$$

(a) Zeigen Sie, dass die Menge B eine Basis von $K_n[x]$ ist.

Sei nun $n = 3$ und $x_i = i$ für $1 \leq i \leq n$ und die Abbildung $f : K_n[x] \to K_n[x]$ definiert durch

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) := (a - 2c) + (-3a - 2b)x + (b + 3c + 7d)x^2 + (a + b + c + d)x^3$$

(b) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(c) Bestimmen Sie die Matrix $M_S^S(f)$ der Abbildung f bezüglich der Basis S im Urbild- und Bildbereich.

(d) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $M_S^B(\mathrm{id}_{K_n[x]})$ und $M_B^S(\mathrm{id}_{K_n[x]})$.

(e) Bestimmen Sie die Matrizen $M_S^B(f)$ und $M_B^B(f)$.

(f) Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$. Geben Sie hierzu jeweils eine Basis an.

Bemerkung. Die Basis der Newton-Polynome B wird beispielsweise in Algorithmen zur Polynominterpolation verwendet.

V9.2. Aufgabe. Prüfen Sie, ob die folgenden linearen Abbildungen Monomorphismen, Epimorphismen oder Isomorphismen sind. Geben Sie gegebenenfalls die Umkehrabbildung an.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (x_1 - x_3, 2x_2 + x_1)^T$

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (x_1 + 2x_2 - 2x_3, x_1 - 2x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + 2x_3)^T$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 : (x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (x_2 - 2x_3, 2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_2)^T$

V9.3. Aufgabe. Sei K ein Körper, und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Seien V und W zwei K-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$.

(a) Zeigen Sie: Der Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W hat die Dimension mn.

(b) Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi_f : \mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{End}_K(V) : g \mapsto f \circ g$ linear ist.

(c) Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\dim\mathrm{Ker}(f) = d$. Zeigen Sie, dass $W := \{f \circ g | g \in \mathrm{End}_K(V)\}$ ein $(n^2 - nd)$-dimensionaler Unterraum von $\mathrm{End}_K(V)$ ist.

V9.4. Aufgabe. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ mal}}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $M \in \mathbb{N}$ so, dass $\operatorname{Ker}(f^m) = \operatorname{Ker}(f^M)$ für alle $m \geq M$.

(b) Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\operatorname{Im}(f^n) = \operatorname{Im}(f^N)$ für alle $n \geq N$.

(c) Sei $L := \max\{M, N\}$ für M, N wie in (a) und (b). Dann gilt $V = \operatorname{Ker}(f^L) \oplus \operatorname{Im}(f^L)$.