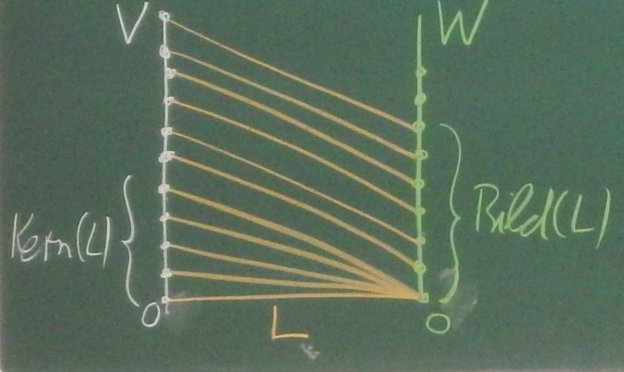
3.27 Dimensionsformel: Sei $L : V \to W$ linear, $\dim V < \infty$. Dann:

$$\dim(V) = \dim \mathrm{Kern}(L) + \dim \mathrm{Bild}(L)$$

wobei $\dim(\{0\}) := 0$.



Beweisskizze für $1 \le \dim \mathrm{Kern}(L) =: k \le n-1$, $n = \dim(V)$

Sei $B = \underline{\{b_1, \dots, b_k\}}$ Basis von $\mathrm{Kern}(L)$

Ergänze zu einer Basis $\{b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ von V

Zeige: $\underline{\{L(b_{k+1}), \dots, L(b_n)\}}$ ist Basis von $\mathrm{Bild}(L)$

$$\Rightarrow \underbrace{\dim(\mathrm{Kern}(L))}_{=k} + \underbrace{\dim(\mathrm{Bild}(L))}_{=n-k} = n = \dim(V).$$

<u>Beisp</u>: 1) $L: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Bild}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix} : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \dim(\mathrm{Bild}(L)) = \underline{2}$

$= \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathrm{Kern}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 = 0 \wedge x_3 - x_4 = 0 \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Kern}(L)) = \underline{2}$

Dimensionsformel: $2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$

2) $L: P_n \to P : p \mapsto p'$

$\dim \mathrm{Kern}(L) = \dim \{ p \in P_n : \underbrace{p' = 0}_{\Rightarrow p = \text{konst}} \} = 1$

Dimensionsformel:

$\dim \mathrm{Bild}(L) = \dim(P_n) - \dim \mathrm{Kern}(L) = n+1-1 = n$

$\mathrm{Bild}(L) = P_{n-1}, \ \dim P_{n-1} = n.$

3.28 Def. Sei $L: V \to W$ lin. Dann heißt $\mathrm{Rang}(L) := \dim(\mathrm{Bild}(L))$ der <u>Rang</u> von L.

34 Lineare Abb.en und Matrizen

3.20 Lineare Abb. u. Basis: Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ Basis von V und $\{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$. Dann exist. genau eine lineare Abb. $L: V \to W$ mit

$$L(e_j) = w_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n. \qquad (*)$$

Beweis: 1) Eindeutigkeit: Sei $L: V \to W$ linear, und es gelte $(*)$. Sei $v \in V$ beliebig. Zeige: $L(v)$ ist eindeutig.

$\{e_1, \dots, e_n\}$ Basis $\Rightarrow v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot e_j$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ eindeutig

$$\Rightarrow L(v) = L\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot e_j\right) \underset{\uparrow \text{ linear}}{=} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \underbrace{L(e_j)}_{= w_j} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot w_j$$

$\Rightarrow L(v)$ ist eindeutig bestimmt.

2) Existenz: Definiere $L: V \to W: \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \mapsto \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot w_j$

Nachrechnen $\Rightarrow L$ ist linear

$$L(e_1) = L(1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n) = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \dots + 0 \cdot w_n$$

Genauso: $L(e_j) = w_j$ für $j = 2, \dots, n$. $\square$

Bsp: 1) $V = \mathbb{R}^n$, $e_j = e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ j-te Koord.

$$\Rightarrow L\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = L\left(x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot w_j$$

2) $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$: $L\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= e_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{= w_1}$, $L\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= e_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_2}$

$L: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = L\left(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

3.31 Satz: 1) Äquivalent sind: (i) $LH(\{w_1, \ldots, w_m\}) = W$
(ii) $L: V \to W$ ist surjektiv

2) " " (i) $\{w_1, \ldots, w_n\}$ ist lin. unabh.
(ii) $L: V \to W$ ist injektiv

3) " " (i) $\{w_1, \ldots, w_n\}$ ist Basis von W
(ii) $L: V \to W$ ist bijektiv

Beweis: siehe 3.20.

3.32 Folg: Seien $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ Basis von V, $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ Basis von W und $L: V \to W$ definiert durch (*) aus 3.20. Sei

$$w_k = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jk} \cdot c_j \quad \text{für } k = 1, \ldots, n.$$

Dann ist L eindeutig bestimmt durch Vorgabe der Koeff. α_{jk}. Vereinbarung: Schreibe die α_{jk} in Matrixform:

$$M := M_L^{C,B} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_{jk}) = (\alpha_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}$$

3.33 Def. Seien wie in 2.32 B Basis von V, C Basis von W und $L: V \to W$ die durch (*) und (**) eindeutig gegebene Abb. Dann heißt $M_L^{C,B}$ die $m \times n$-Matrix der Abb. L. Es gelten:

1.) Zeilenzahl $m = \dim(W) =$ Dim. Bildraum

2) Spaltenzahl $n = \dim(V) =$ Dim. Urbildraum

3) In den Spalten von $M_L^{C,B}$ stehen die Koordinaten bezügl. C der Bilder der Basisvektoren $b_1, \dots, b_n$:

$$M_L^{C,B} = \begin{pmatrix} \vdots & \alpha_{12} & \cdots \\ \vdots & \alpha_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ & \alpha_{m2} & \cdots \end{pmatrix} \Rightarrow L(b_2) = \alpha_{12} \cdot c_1 + \alpha_{22} \cdot c_2 + \dots + \alpha_{m2} \cdot c_m = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}_C$$

bzw. $(L(b_2))_C = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}$

...draum
...ldraum
Koor-
Basis-

...; c_2 ... $+ d\, c_m$

Bsp: 1) $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\end{pmatrix}$

$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$ $\quad L: \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{e_1} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{e_2} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}}_{w_2}$

$C := B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{c_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{c_2} \right\} \Rightarrow \begin{cases} L(e_1) = c_2 = 0\cdot c_1 + 1\cdot c_2 \Leftrightarrow L(e_1)_C = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ L(e_2) = (-1)\cdot c_1 + 0\cdot c_2 \Leftrightarrow L(e_2)_C = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \end{cases}$

$\Rightarrow M_L^{C,B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aber falls statt C die Basis $C' = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}}_{c_1'}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}}_{c_2'} \right\}$ gewählt wird:

$$\left.\begin{array}{l} L(e_1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot c_1' + 0\cdot c_2' \Rightarrow L(e_1)_{C'} = \boxed{\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}} \\ L(e_2) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = 0\cdot c_1' + 1\cdot c_2' \Rightarrow L(e_2)_{C'} = \boxed{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} \end{array}\right\} \Rightarrow M_L^{C',B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Zur Nullabbildung $0: x \mapsto 0$ gehört immer die Nullmatrix:

$$M_0^{C,B} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} =: 0$$

3) Zu $Id_V: V \to V: x \mapsto x$ gehört bezüglich <u>einer</u> Basis die <u>Einheitsmatrix</u>:

$$M_{Id_V}^{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} =: E_n, \text{ wobei } n = \dim(V)$$

Aber: $M_{Id_V}^{C,B} \neq E_n$, falls $C \neq B$. (Basiswechselmatrix)

$V=\mathbb{R}^2$, $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = \{e_1,e_2\}$

$W=\mathbb{R}^2$, $C=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix}\right\} = \{c_1,c_2\}$

$L=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}: e_1 \mapsto e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot c_1 + 2\cdot c_2$

$\phantom{L=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}:} e_2 \mapsto e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot c_1 + 0\cdot c_2$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} L(e_1)_C &= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \\ L(e_2)_C &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \Rightarrow M^{C,B}_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}$$

4) Sei $L: V\to W$ bijektiv, $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ Basis von V

$C:=\{L(e_1), L(e_2),\dots,L(e_n)\}$ ist Basis von W (3.31)

$L(e_1)_C = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $L(e_2)_C = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $L(e_n)_C = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow M^{C,B}_L = \begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&&\vdots\\\vdots&0&\ddots&0\\0&0&\cdots0&1\end{pmatrix} = E_n$$

Diese Matrix sagt nichts über L aus, außer der Bijektivität

5) $V=\mathbb{R}^3$, $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $W=\mathbb{R}^2$, $C=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$M^{C,B}_L = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix} \Rightarrow L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$

$L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = L\left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = x_1 L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2 L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3 L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+2x_2+3x_3\\4x_1+5x_2+6x_3\end{pmatrix}$$