Bsp. 3) $V = \{(a_n) \text{ Folge in } \mathbb{C}\}$

$e_j \in V$ mit $e_j = (0, \dots 0, 1, 0, 0, \dots)$

$\uparrow$ j-tes Folgenglied

$M := \{e_j : j \in \mathbb{N}\} \subseteq V$

M linear unabh., denn:

Seien $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_m}\} \subseteq M$ und

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_{j_k} = 0$$

Fülle mit Koeffizienten 0 auf, so dass $\sum_{l=1}^{L} \mu_l \cdot e_l = 0$, $L = \max\{j_1, \dots, j_m\}$

$$\left(\mu_l := \begin{cases} \lambda_k & \text{falls } l = j_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\right.$$

$$\sum_{l=1}^{L} \mu_l e_l = (\mu_1, 0, 0, \dots) + (0, \mu_2, 0, 0, \dots) + \dots$$

$$+ (0, \dots, 0, \mu_L, 0, 0, \dots)$$

$$= (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_L, 0, 0, \dots)$$

$$\overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_L = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

$\Rightarrow M$ lin. unabhängig

Ist M eine Basis von V?

$LH(M) = \{$abbrechenden Folgen$\}$

M ist keine Basis, da z.B.

(a_n) mit $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow (a_n) \in V \wedge (a_n) \notin LH(M)$

4) $P_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^j$, $j \in \mathbb{N}_0$

a) $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ ist Basis von $\mathcal{P}_n =$

$= \{$Polynome vom Grad $\leq n\}$

Sei $P \in \mathcal{P}_n \Rightarrow P = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ mit geeign. $a_j \in \mathbb{C}$

($a_n = 0$ möglich)

$\Rightarrow \underline{P = \sum_{j=0}^{n} a_j P_j}$ und die $a_0, \dots, a_n$ sind

<u>eindeutig</u>

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \{P_0, \dots, P_n\} \text{ ist lin. unabh.} \\ \Rightarrow LH(\{P_0, \dots, P_n\}) = \mathcal{P}_n \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{P}_n$ ist Basis

b) $V = \mathcal{P} = \{P : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid P \text{ Polynom}\}$

$M := \{P_j : j \in \mathbb{N}_0\} \subseteq V$

M ist Basis, siehe a) (Basis mit ∞-vielen Elementen)

5) $V := \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$M := \{x \mapsto e^{ax} : a \in \mathbb{R}\} \subsetneq V$

M ist lin. unabhängig:

Sei $\lambda_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 e^{a_2 x} + \ldots + \lambda_n e^{a_n x} = 0$ auf $\mathbb{R}$

wobei alle a_j verschieden.

Sei o.B.d.A. $a_1 = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1}_{=\text{konst.}} + \lambda_2 \underbrace{e^{\overbrace{(a_2 - a_1)}^{<0} x}}_{\to 0} + \ldots + \lambda_n \underbrace{e^{\overbrace{(a_n - a_1)}^{<0} x}}_{\to 0 \text{ für } x \to \infty} = 0 \text{ auf } \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

Induktion $\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$.

$\Rightarrow$ M lin unabhängig

Aber M ist keine Basis von V

(z.B. $f : x \mapsto x^2$ ist nicht als Linearkombination darstellbar).

3.19 Die Idee von Descartes: Sei V ein VR über $\mathbb{K}$ und $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Setze

$$T : \mathbb{K}^n \to V : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j$$

Falls T umkehrbar: Jeder Vektor $v \in V$ besitzt die Koord. $x_1, \ldots, x_n$. Mit Koordinaten kann man rechnen → Analyt. Geometrie

3.20 Satz: 1) T ist linear

2) Äquivalent sind: (i) $LH(\{v_1, \dots, v_n\}) = V$

(ii) T ist surjektiv

3) " " : (i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist lin. unabh.

(ii) T ist injektiv

4) " " (ii) T ist bijektiv

(i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist Basis von V

Beweis: 1) Selber als Übung

2) (i) $\Leftrightarrow \forall v \in V \; \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n : v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j$

$\Leftrightarrow \forall v \in V \; \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : T\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = v$

$\Leftrightarrow$ (ii)

3) (i) $\overset{3.18\,(ii)}{\Longleftrightarrow} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \cdot v_j \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1 \wedge \dots \wedge \lambda_n = \mu_n \right)$

$\Leftrightarrow \left(T\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \right)$

$\Leftrightarrow$ (ii)

4) Folgt aus 2) u. 3). $\square$

3.21 Folg: Ist V ein VR über $\mathbb{K}$ mit endlicher Basis B und $n = \#B$, so ist V isomorph zu $\mathbb{K}^n$.

Beweis: Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Mit B definiere $T: \mathbb{K}^n \to V$ wie in 3.19.

3.20 $\Rightarrow$ T ist ein Isomorphismus. □

3.22 Satz: Besitzt V eine Basis mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen, so gelten:

1) Jede Teilmenge mit mehr als n Elementen ist lin. abh.
2) Jede Basis von V besitzt genau n Elemente.

Beweis: 1) Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ die Basis von V. Dann ist $T: \mathbb{K}^n \to V$ ein Isomorphismus.

Seien $w_1, \dots, w_{n+1} \in V$. Dann

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_{n+1} w_{n+1} = 0$$

$$\overset{T \text{ bij.}}{\iff} T^{-1}(\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{n+1} w_{n+1}) = T^{-1}(0) \overset{T^{-1} \text{ lin}}{=} 0$$

$$\overset{T^{-1} \text{ lin}}{\iff} \lambda_1 \underbrace{T^{-1}(w_1)}_{\in \mathbb{K}^n} + \dots + \lambda_{n+1} \underbrace{T^{-1}(w_{n+1})}_{\in \mathbb{K}^n} = 0$$

Dies sind n Gleichungen für $n+1$ Unbekannte und das LGS ist homogen.

$\Rightarrow$ Es gibt nichttriviale Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$.

$\Rightarrow$ $\{w_1, \dots, w_{n+1}\}$ ist lin. abhängig

$\Rightarrow$ Jede Menge $M \subseteq V$ mit $\{w_1, \dots, w_{n+1}\} \subseteq M$ ist auch lin. abhängig.

1) Seien B', B Basen von V

B' lin. unabh. $\overset{1)}{\underset{B \text{ Basis}}{\Rightarrow}}$ $\#B' \leq \#B$

B " " $\overset{1)}{\underset{B' \text{ Basis}}{\Rightarrow}}$ $\#B \leq \#B'$

$\Rightarrow \#B' = \#B$. $\square$

2.23 Def: Besitzt V eine endliche Basis B, so heißt $n := \#B$ die <u>Dimension</u> von V.

$\dim V = \dim(V) := \#B$.

Besitzt V keine endl. Basis, so heißt V <u>unendlichdimensional</u>.

<u>Beisp.</u>: 1) $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, denn

$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ j-te Koord. ist 1, alle anderen 0, $B := \{e_1, \dots, e_n\}$ ist Basis

2) $\mathbb{C}^3$ als VR über $\mathbb{R}$: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^3) = 6$

Basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$

3) $V = LH\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right)$ ist UVR des $\mathbb{R}^3$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis: $\dim(V) = 2$

4) $\dim(P_n) = n+1$

Basis: $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ mit $P_j : z \mapsto z^j$

5) P ist unendlichdimensional

2.24 Folg: Falls $\dim(V) = n$ und $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ lin. unabhängig $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ ist Basis

Beweis: Sei $v \in V$ bel.

$\dim(V) = n \Rightarrow \{v_1, \dots, v_n, v\}$ ist lin. abh.

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$, nicht alle 0: $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n + \lambda_{n+1} \cdot v = 0$

Es folgt $\lambda_{n+1} \neq 0$, denn sonst wäre $\{v_1, \dots, v_n\}$ lin. abh.

$\Rightarrow v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}} \cdot v_j \in LH(\{v_1, \dots, v_n\})$

$\overset{v\ \text{bel.}}{\Rightarrow} LH(\{v_1, \dots, v_n\}) = V$. $\square$

3.25 Basisergänzungssatz: Sei V endlich-dimensional, $m \in \mathbb{N}$, $m < n := \dim(V)$ und $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ lin. unabh. Dann exist. $v_{m+1}, \dots, v_n \in V$, so dass $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V bildet.

Beweisskizze: Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ Basis von V.

$\Rightarrow v_1 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot e_j$

$v_1 \neq 0 \Rightarrow \exists j_1 : \lambda_{j_1} \neq 0$.

$\Rightarrow e_{j_1} = \frac{1}{\lambda_{j_1}} \left(v_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1}}^{n} \lambda_j \cdot e_j \right)$

$\Rightarrow (\{e_1, \dots, e_n\} \setminus \{e_{j_1}\}) \cup \{v_1\}$ ist Basis von V

entsprechend $(\{e_1, \dots, e_n\} \setminus \{e_{j_1}, e_{j_2}\}) \cup \{v_1, v_2\}$ ist Basis

⋮

$(\{e_1, \dots, e_n\} \setminus \{e_{j_1}, \dots, e_{j_m}\}) \cup \{v_1, \dots, v_m\}$ ist Basis $\square$

3.26 Bem: Man kann zeigen, dass jeder VR eine Basis besitzt.