3.39 Matrizen $\leftrightarrow$ lin Abb.: Sei

$M = (a_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}$ mit Spaltenvekt. $a_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$.

Definiere

$$L_M : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot a_k = M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dann ist L_M lin. Sind E, E' die kanonischen Basen in $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$, so folgt

$$M^{E',E}_{L_M} = M.$$

Die Abb.

$$\Phi : M \to L_M \quad \text{mit } \Phi^{-1} : L \mapsto M_L^{E',E}$$

ist eine bijektive Abb. von der Menge aller $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$ auf die Menge aller lin. Abb. $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

3.40 Matrizen und Verkettung lin. Abb.en: Seien M eine $m \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$ und K eine $l \times m$-Matrix. Dann $L_M = \Phi(M) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $L_K = \Phi(K) : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^l$.

Es gilt

$$\begin{array}{ccc} (K, M) & \longmapsto & K \cdot M \quad \text{Matrizenmult.} \\ \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \Phi \\ (\Phi(K), \Phi(M)) & \mapsto & \Phi(K) \circ \Phi(M) \quad \text{Verkettung} \end{array}$$

Hintereinanderausführung

D.h. $\Phi(K \cdot M) = \Phi(K) \circ \Phi(M)$.

So wurde die Matrizenmult. definiert.

Verkettung von Abb.en ist assoziativ,

$\Rightarrow$ Matrizenmult. ist assoziativ:

Sind M, K, L Matrizen, so dass $(M \cdot K) \cdot L$ def. ist, so ist auch $M \cdot (K \cdot L)$ definiert und gleich

3.41 Matrizen und Umkehrabb.: 1) Sei $L: V \to V$ lin und bij., B Basis von V mit n Elementen. Dann:

$$M_L^{B,B} \cdot M_{L^{-1}}^{B,B} \overset{3.38}{=} M_{L \circ L^{-1}}^{B,B} = M_{Id_V}^{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} =: E_n$$

Die $n \times n$-Matrix E_n heißt Einheitsmatrix.

2) Sei M eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Falls eine $n \times n$-Matrix M^{-1} exist. mit $M \cdot M^{-1} = E_n$, so gilt auch $M^{-1} \cdot M = E_n$. Außerdem ist M^{-1} eindeutig, d.h. die Matrixgleichung $M \cdot X = E_n$ besitzt genau die eine Lös. $X = M^{-1}$. M^{-1} heißt inverse Matrix zu M.

Beweis von 2):

a) Sei $K := \Phi(M) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : x \mapsto M \cdot x$

$L := \Phi(M^{-1}) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : x \mapsto M^{-1} \cdot x$

$\Rightarrow K \circ L : x \mapsto K(L(x)) = K(M^{-1} \cdot x) = M \cdot (M^{-1} \cdot x)$

$\overset{\text{Assoziativ.}}{=} (\underbrace{M \cdot M^{-1}}_{= E_n}) \cdot x = x$

$\Rightarrow K \circ L = Id_{\mathbb{K}^n}$

$\overset{\text{Eigenschaften Abb.}}{\Rightarrow} L \circ K = Id_{\mathbb{K}^n}$

$\Rightarrow \underbrace{\Phi^{-1}(L \circ K)}_{\overset{3.40}{=} \Phi^{-1}(L) \cdot \Phi^{-1}(K) = M^{-1} \cdot M} = \Phi^{-1}(Id_{\mathbb{K}^n}) = E_n$

$\Rightarrow M^{-1} \cdot M = E_n$

b) Sei X $n \times n$-Matrize mit $M \cdot X = E_n$

$\Rightarrow X = E_n \cdot X = (M^{-1} \cdot M) \cdot X \overset{\text{Ass.Ges.}}{=} M^{-1} \cdot (\overbrace{M \cdot X}^{= E_n}) = M^{-1}$. $\square$

3.42 Def: Eine $n \times n$-Matrize über $\mathbb{K}$ heißt invertierbar, falls eine $n \times n$-Matrize M^{-1} exist., sodass $M \cdot M^{-1} = E_n$.

Kurztest:

- Linear abhängig / unabhängig
- Dimension, Dimensionsformel für lin. Abb.
- Matrize zu lin. Abb. und umgekehrt
- Kern einer lin. Abb. berechnen
- Matrizenprodukt berechnen

Beisp.: 1) $\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}}_{\substack{M\\ \text{oder } M^{-1}}}\underbrace{\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}}_{\substack{M^{-1}\\ M}} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = E_2$

2) $M = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar, denn

$$L_M : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}$$

ist nicht injektiv (z.B. $L_M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = L_M\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$)
also nicht umkehrbar.

3.44 Satz: Die Menge $\{L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \mid L \text{ lin. u. bij.}\}$ mit der Hintereinanderausführung $\circ$ als Verknüpfung bildet eine Gruppe (für $n \geq 2$ nicht kommutativ), die lineare Gruppe $GL_n(\mathbb{K})$.

Beweis: 1) K, L lin. bij. $\Rightarrow K \circ L$ lin und bij.
$\Rightarrow \circ$ ist Verknüpfung in $GL_n(\mathbb{K})$.

2) Assoziativgesetz: Seien $J, K, L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x \in \mathbb{K}^n$. Dann

$$(J \circ (K \circ L))(x) = J((K \circ L)(x)) = J(K(L(x)))$$
$$((J \circ K) \circ L)(x) = (J \circ K)(L(x)) = J(K(L(x)))$$

3) Neutrales Element $e = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$

4) $\underbrace{L \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow L^{-1}}_{\text{Inverses Element}} \in GL_n(\mathbb{K})$. Es gilt $L \circ L^{-1} = L^{-1} \circ L = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$.

3.45 Folg: Sind A, B invertierbare $n\times n$-Matrizen, so ist auch $A\cdot B$ invertierbar, und es gilt

$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

Beweis: $(A\cdot B)\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1}) = (A\cdot(\underbrace{B\cdot B^{-1}}_{=E_n}))\cdot A^{-1} = A\cdot A^{-1} = E_n$ □

3.46 Folg: Die Menge $\{M : M$ ist invertierbare $n\times n$-Matrix über $\mathbb{K}\}$ mit der Matrizenmult. als Verknüpfung bildet eine Gruppe. Sie wird ebenfalls lineare Gruppe $GL_n(\mathbb{K})$ genannt.

Beweis: Durch $\Phi: M \mapsto L_M$ bzw. $\Phi^{-1}: L \mapsto M_L^{E',E}$ übertragen sich alle Gruppeneigenschaften aus 3.44. □

3.47 Folg: Sei $L: V\to V$ lin mit Matrix $M_L^{B,B} = M$. Dann sind äquivalent:

(i) L ist bijektiv

(ii) M ist invertierbar.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): (i) $\overset{3.41}{\Rightarrow} M^{-1} = M_{L^{-1}}^{B,B} \Rightarrow$ (ii)

(ii) $\Rightarrow$ (i): Setze $K: V\to V: x\mapsto K(x)$ mit $K(x)_B := M^{-1}\cdot x_B$

$\Rightarrow (L\circ K(x))_B = M_L^{B,B}\cdot K(x)_B = \underbrace{\underbrace{M_L^{B,B}}_{=M}\cdot M^{-1}}_{=\mathrm{Id}_V}\cdot x_B = x_B$

$\Rightarrow L\circ K = id_V \Rightarrow K = L^{-1} \Rightarrow$ (i) □

3.5 Lineare Gleichungssysteme II

3.48 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen:

Sei ein LGS gegeben:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} (*)$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$M := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dann ist $x_1, \dots, x_n$ genau dann Lös. von $(*)$, wenn $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Lös ist von

$$M \cdot x = b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (**|*)$$

oder anders geschrieben

$$L_M(x) = b \qquad (**)$$

3.49 Folg: Das LGS $(*)$ ist genau dann lösbar, wenn $b \in \text{Bild}(L_M)$

3.50 Lösungsstruktur: Sei $L: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lin. und das inhom. LGS $Lx = b$ gegeben. Ist x_0 eine Lösung, dann sind alle Lösungen gegeben durch

$$x \in x_0 + \mathrm{Kern}(L) := \{x_0 + y : L(y) = 0\}.$$

Man nennt x_0 <u>partikuläre Lösung</u>, obwohl x_0 nur irgendeine Lös. darstellt (falls mehrere existieren).

Beweis durch Nachrechnen.

<u>Beisp:</u>

$$\begin{aligned} 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 3x_3 &= 1 \quad \vert\cdot(-2) \quad \vert\cdot(-3) \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 2 \quad \leftarrow + \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 4 \quad \leftarrow + \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 0 = 0 \\ -x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2-3t \\ -1 \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{part. Lös } x_0} + \underbrace{t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{Kern}(L_M)}$$

Probe: Bestimme $\mathrm{Kern}(L_M)$, $L_M : x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$L_M(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vert\cdot(-2) \; \vert\cdot(-3) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = t \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Kern}(L_M) = \left\{ t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

z.B. gilt auch für das ursprüngliche LGS:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_0} + \underbrace{t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}}_{\text{Kern}}$$