Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} = \{e_1, e_2, e_3\}$

$W = \mathbb{R}^2$, $C = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\} = \{e_1', e_2'\}$

$M_L^{C,B} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ sei gegeben

$$\Rightarrow \begin{cases} L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1 \cdot e_1' + 4 \cdot e_2' = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \\ L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 2 \cdot e_1' + 5 \cdot e_2' = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \\ L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 3 \cdot e_1' + 6 \cdot e_2' = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} \end{cases}$$

Sei $x \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L(x) = L\left(\quad \ldots \quad \right)$$

$$\overset{L \text{ lin.}}{=} x_1 \cdot L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2 \cdot L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3 \cdot L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{nachher}}{\overset{\text{Def}}{=}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

3.34 Bild eines bel. Vektors:

Sei $L: V \to W$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von V, $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ Basis von W, $M_L^{C,B} = (\alpha_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}$ die Matrix von L bezügl. B und C.

Sei $v \in V$.

$$\Rightarrow v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot b_j$$ mit geeigneten $\lambda_j \in K$, λ_j eindeutig

$$\Rightarrow L(v) = L\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot b_k\right) \overset{L \text{ lin}}{=} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot L(b_k)$$

$$M_L^{C,B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L(b_1) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j1} \cdot c_j = \alpha_{11} c_1 + \alpha_{21} c_2 + \dots + \alpha_{m1} c_m$$

$$\Rightarrow L(b_k) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jk} \cdot c_j$$

$$\Rightarrow L(v) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{jk} \cdot c_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\lambda_k \cdot (\alpha_{jk} \cdot c_j)}_{= (\lambda_k \alpha_{jk}) \cdot c_j = (\alpha_{jk} \lambda_k) \cdot c_j}$$

$$\overset{(S1)}{=} \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \lambda_k \right)}_{=:\, \mu_j \in \mathbb{K}} \cdot c_j$$

$$\Rightarrow L(v)_C = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k} \lambda_k \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k} \lambda_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{mk} \cdot \lambda_k \end{pmatrix}}_{\text{Koordinaten von } L(v) \text{ bezüglich Basis } C} =: \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B}_{\text{Koordinaten von } v \text{ bezüglich Basis } B}$$

j-te Koordinate von $L(v)$ bezüglich C

= j-te Zeile der Matrix $M_L^{C,B}$ "Mal" Vektor, der die Koordinaten von v bezüglich B enthält.

<u>Beispiel</u>: $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $B = \{b_1, b_2\}$ Basis des $\mathbb{R}^2$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ Basis des $\mathbb{R}^3$.

$$M_L^{C,B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_B = x_1 \cdot b_1 + x_2 \cdot b_2$$

$$\Rightarrow L(x)_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2 x_2 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \\ 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

d.h. $L(x) = (x_1 + 2x_2) \cdot c_1$
$+ (3x_1 + 4x_2) \cdot c_2$
$+ (5x_1 + 6x_2) \cdot c_3$

3.35 Satz: Seien $B=\{e_1,\dots,e_n\}$, $C=\{c_1,\dots,c_m\}$ Basen von V bzw. W und $M_L^{C,B}$ die Matrix der Abb. $L: V\to W$. Dann gilt für $v\in V$

$$L(v)_C = \underbrace{M_L^{C,B}\cdot v_B}_{\text{Matrix "Mal" Vektor}}$$

3.36 Satz: Sei $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ linear, E,E' kanonische Basen von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ und $\underbrace{M_L^{E',E}}_{=(\alpha_{jk})}$ die Matrix von L. Sei weiter

$$a_k := \begin{pmatrix}\alpha_{1k}\\ \alpha_{2k}\\ \vdots\\ \alpha_{mk}\end{pmatrix}$$ der k-te Spaltenvektor

der Matrix $M_L^{E',E}$. Dann:

1) $\mathrm{Bild}(L) = LH\{a_1,\dots,a_n\}$

2) $\mathrm{Rang}(L) = \dim LH\{a_1,\dots,a_n\}$

Beweis: Sei $x\in\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow (x)_E = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$\Rightarrow L(x)_{E'} = x_1 \underbrace{L(e_1)}_{=a_1} + \dots + x_n \underbrace{L(e_n)}_{=a_n} \qquad \square$$

3.37 Satz: $L : V \to W$ linear, $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$.

Dann existieren Basen B, C von V bzw. W, sodass

$$M_L^{C,B} = \begin{array}{c} \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)}_{k \text{ Spalten} \qquad n-k \text{ Spalten}} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} k \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} m-k \text{ Zeilen} \end{array}$$

Hierbei gilt: $k = \operatorname{Rang}(L) = \dim \operatorname{Bild}(L)$

$n - k = \dim \operatorname{Kern}(L)$

Dimensionsformel: $\dim \operatorname{Bild}(L) + \dim \operatorname{Kern}(L) = \dim V$

3.38 Verknüpfung lin. Abbildungen:

$$\begin{tikzcd} U \text{ Basis } B_U \arrow[r, "K \text{ lin}"', "M_K^{B_V,B_U}"] \arrow[rr, bend right, "L \circ K \text{ lin}"', "M_{L\circ K}^{B_W,B_U}"] & V \text{ Basis } B_V \arrow[r, "L \text{ lin}"', "M_L^{B_W,B_V}"] & W \text{ Basis } B_W \end{tikzcd}$$

Dann gilt

$$M_{L\circ K}^{B_W,B_U} = M_L^{B_W,B_V} \cdot M_K^{B_V,B_U}$$

Wobei das Matrizenprodukt def. ist durch

$$\gamma_{ik} := \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\,\beta_{jk} \text{ für } (\gamma_{ik})_{\substack{i=1,\dots,l\\ k=1,\dots,n}} = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,l\\ j=1,\dots,m}} \cdot (\beta_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m\\ k=1,\dots,n}}$$

Wir sehen: Für $C = A \cdot B$ gelten:

Anzahl Zeilen von C = Anzahl der Zeilen von A

Anzahl Spalten von C = Anzahl Spalten von B

Matrizenprodukt ist nur definiert, wenn

Anzahl Spalten von A = Anzahl Zeilen von B

Beispiele: 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 3 & 1\cdot 4 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 & 1\cdot 6 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ 4\cdot 2 + 5\cdot(-1) + 6\cdot 3 & 4\cdot 4 + 5\cdot 0 + 6\cdot 1 & 4\cdot 6 + 5\cdot 1 + 6\cdot 0 \\ 7\cdot 2 + 8\cdot(-1) + 9\cdot 3 & 7\cdot 4 + 8\cdot 0 + 9\cdot 1 & 7\cdot 6 + 8\cdot 1 + 9\cdot 0 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}$$

5)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

"dyadisches Produkt"

Insbesondere: $A \cdot B \neq B \cdot A$ im Allg.