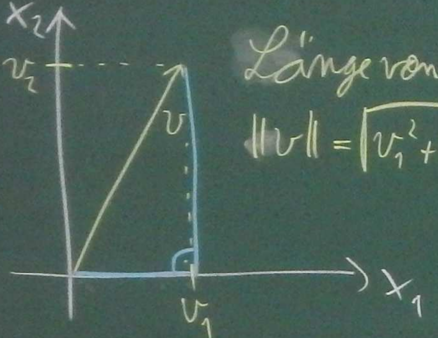
3.7 Länge von Vektoren

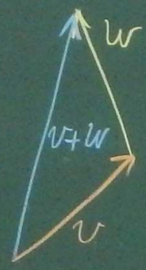
Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$



Länge von v

$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$



$V = \mathbb{R}^n$: Länge des Vektors $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

$V = \mathbb{C}^n$: " " " $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}$

3.60 Def: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und V ein $\mathbb{K}$-VR.

Eine Abb. $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$ heißt **Norm**, falls für $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten:

(N1) $\|x\| \geq 0 \;\wedge\; (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ (Positivität, Definitheit)

(N2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (Homogenität)

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Δ-Ungl)

Beispiele: Sei $V = \mathbb{R}^n$ oder $V = \mathbb{C}^n$

1) $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$ euklidische Norm

2) $\left\|\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right\|_\infty := \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$ (Maximumnorm)

3) $p \geq 1: \left\|\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}$

$p = 1$: $\|\ \ \|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

$p = 2$: euklid Norm

$p \to \infty$: Maximumnorm

<u>3.61 Def</u>: Ist $\|\ \|$ eine Norm auf V, so heißt

$$B_1(0) := \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$$

<u>Einheitskugel</u>. Ist $\|x\| = 1$, so heißt x <u>Einheitsvektor</u>.

<u>Beisp</u>: 1) $x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$: $\|x\|_2 = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

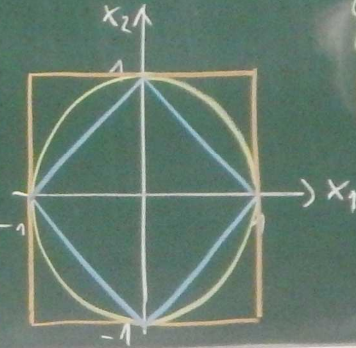
$\Rightarrow y := \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ist Einheitsvektor: $\|y\| = \left|\frac{1}{\sqrt{14}}\right| \|x\| = 1$

2) $V = \mathbb{R}^2$

a) $\left\|\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

b) $\left\|\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right\|_1 = |x_1| + |x_2|$

c) $\left\|\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$



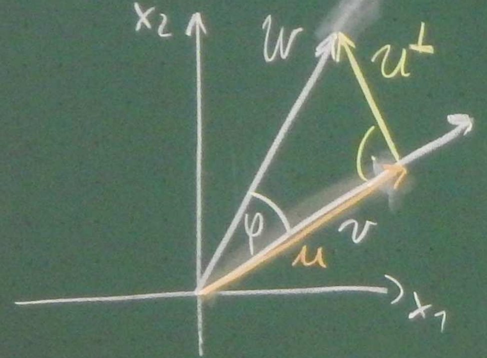
$\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$

$\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = 1\}$

$\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 = 1\}$

3.8 Winkel im VR

<u>Beispiel</u>: $V=\mathbb{R}^2$, $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$, $w=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$



$$u = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{v_1^2 + v_2^2}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$

$$u^\perp = \frac{v_1 w_2 - v_2 w_1}{v_1^2 + v_2^2}\begin{pmatrix}-v_2\\v_1\end{pmatrix}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\|u\|_2}{\|w\|_2}$$

$$= \frac{\frac{|v_1 w_1 + v_2 w_2|}{v_1^2+v_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{\sqrt{w_1^2+w_2^2}} = \frac{|v_1 w_1 + v_2 w_2|}{\|v\|_2\,\|w\|_2}$$

Wichtiges Element bei Winkelberechnung $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2$

<u>3.63 Def</u>: Sei V ein VR über $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Eine Abb.

$$V\times V\to\mathbb{K} : (x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$$

heißt <u>Skalarprodukt</u>, falls für $x,y,z\in V$ und $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$

(SP2) $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$ insbes. $\langle x,x\rangle\in\mathbb{R}$

(SP1) $\langle x,x\rangle\geq 0$ und $(\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0)$

(SP3) $\langle\lambda\cdot x+\mu\cdot y,z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle+\mu\langle y,z\rangle$

Ein VR mit Skalarprodukt $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt <u>euklidischer VR</u> falls $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ bzw. <u>unitärer VR</u> falls $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Beisp: 1) $V = \mathbb{C}^n$ als VR über $\mathbb{C}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \overline{y_j}$$

insbes $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2$

also $\left\langle \begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4+i \\ 1-i \end{pmatrix} \right\rangle = (1+i)\cdot(4-i) + i(1+i) =$

$= 4 - i + 4i - i^2 + i + i^2$

$= 4 + 4i$

2) In $V = \mathbb{C}^n$ ist auch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle^{\sim} := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \overline{y_j} \quad \text{mit } \lambda_j \in \,]0,\infty[$$

ein Skalarprodukt. $\quad = \left\langle x, \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot y \right\rangle$

3.64 Eigenschaften: 1) Für festes $y \in V$ ist die Abb.

$x \mapsto \langle x, y \rangle$ linear (SP3)

2) Nach (SP2) und (SP3):

$\langle x, \lambda \cdot y \rangle = \overline{\langle \lambda \cdot y, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y, x \rangle} = \overline{\lambda}\, \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$

$\langle x, y+z \rangle = \overline{\langle y+z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle z, x \rangle} = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

3) $(\forall y \in V: \langle x, y \rangle = 0) \Rightarrow x = 0$ (setze $y = x$, (SP1))

(*)

3.65 Satz: Für $x, y \in V$ gilt $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}$ (CSB).

(Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungl.)

Beweis: Fall $y = 0$: $|0| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{0} = 0$ stimmt

Fall $y \neq 0$: Setze $\lambda := -\dfrac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \Big\} \neq 0$ nach (SP1)

(*) 4) $y=0 \Rightarrow \forall x\in V: \langle y,x\rangle = 0$

$$y = \underbrace{0}_{\in \mathbb{K}}\cdot \underbrace{0}_{\in V} + 0\cdot 0 \Rightarrow \langle y,x\rangle = \langle 0\cdot 0 + 0\cdot 0, x\rangle$$

$$\overset{(SP3)}{=} 0\langle 0,x\rangle + 0\langle 0,x\rangle$$

$$= 0$$

Außerdem $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle} = \bar{0} = 0$

$$0 \overset{(SP1)}{\leq} \underbrace{\langle y,y\rangle}_{\geq 0}\cdot \underbrace{\langle x+\lambda\cdot y, x+\lambda\cdot y\rangle}_{\geq 0}$$

$$= \langle x,x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \lambda\cdot\bar{\lambda}\langle y,y\rangle$$

$$= \langle y,y\rangle\langle x,x\rangle - \cancel{\langle y,y\rangle}\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\cancel{\langle y,y\rangle}}\langle x,y\rangle - \cancel{\langle y,y\rangle}\cdot\frac{\langle x,y\rangle}{\cancel{\langle y,y\rangle}}\langle y,x\rangle + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\cancel{\langle y,y\rangle^2}}\cancel{\langle y,y\rangle^2}$$

$= |\langle x,y\rangle|^2$

$$= \langle y,y\rangle\langle x,x\rangle - |\langle x,y\rangle|^2$$

$$\Rightarrow |\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle y,y\rangle\langle x,x\rangle. \quad \square$$

3.66 Satz: Ist $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein VR mit Skalarprod., so definiert $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ eine Norm auf V.
Die CSB wird damit zu

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|_2\|y\|_2$$

Beweis: (N1): $\langle x,x\rangle \overset{(SP1)}{\geq} 0 \Rightarrow \|x\|_2 \geq 0$

(SP1): $(\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0) \Rightarrow (\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow x=0)$

(N2) $\|\lambda\cdot x\|_2 = \sqrt{\langle \lambda\cdot x, \lambda\cdot x\rangle}$

$= \sqrt{\lambda\cdot\bar{\lambda}\langle x,x\rangle}$

$$= |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|_2$$

(N3) Zeige $\|x+y\|^2 \leq \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \underbrace{\langle y, x \rangle}_{= \overline{\langle x, y \rangle} \text{ nach (SP2)}} + \langle y, y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \underbrace{2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle}_{\leq 2 |\langle x, y \rangle| \overset{CSB}{\leq} 2 \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}} + \langle y, y \rangle$$

$$\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2$$

$$= \left(\|x\| + \|y\|\right)^2 \qquad \square$$

3.9 Orthogonalität

3.67 Def. Sei V ein VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1) $x, y \in V$ heißen *orthogonal* ($x \perp y$), falls $\langle x, y \rangle = 0$.

2) Eine Familie $(v_i)_{i \in J} \subseteq V$ mit $v_i \neq 0$ für $i \in J$ heißt *Orthogonalsystem*, falls $v_i \perp v_j$ für $i \neq j$.

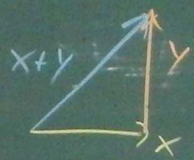
$(v_i)_{i \in J}$ heißt *Orthonormalsystem*, falls (ONS)

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} =: \delta_{ij} \quad \text{(Kroneckersymbol)}$$

Ist ein ONS gleichzeitig Basis von V, so heißt es *Orthonormalbasis* von V. (ONB)

3.68 Satz des Pythagoras: Sei $x \perp y$. Dann

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$



Denn: $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y)$

$$= (x,x) + \underbrace{\cancel{(x,y)}}_{=0} + \underbrace{\cancel{(y,x)}}_{=0} + (y,y)$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2.$$