3.51 Folg. Sei $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lin und das LGS $Lx = b$ gegeben. Dann äquiv.:

(i) Das LGS besitzt für $\underbrace{\text{jedes } b \in \mathbb{K}^n}_{\text{Surjekt. von } L}$ $\underbrace{\text{genau eine}}_{\text{Injekt. von } L}$ Lösung $x \in \mathbb{K}^n$.

(ii) $\text{Kern}(L) = \{0\}$

(iii) $\text{Rang}(L) = n$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): $b = 0 \overset{(i)}{\Rightarrow}$ einzige Lös $x = 0$
$\Rightarrow$ (ii)

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Dimensionsformel

$$\dim \text{Bild}(L) + \dim \text{Kern}(L) = n$$

Also: $\underbrace{\dim \text{Bild}(L) = n}_{\Leftrightarrow \text{Bild}(L) = \mathbb{K}^n} \Leftrightarrow \underbrace{\dim \text{Kern}(L) = 0}_{\Leftrightarrow \text{Kern}(L) = \{0\}}$

(ii) $\Rightarrow$ (i): (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow \text{Bild}(L) = \mathbb{K}^n$

$\Rightarrow \forall b \in \mathbb{K}^n : b \in \text{Bild}(L)$

$\Rightarrow Lx = b$ hat mind. eine Lös.

(ii) $\overset{3.12}{\Rightarrow}$ L injektiv $\Rightarrow$ Lös. eindeutig

$\square$

3.52 Def: Sei $M=(a_{jk})$ eine $m\times n$-Matrix mit Spaltenvektoren

$$a_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}.$$

Der Rang von M ist def. durch

$$\operatorname{Rang}(M) := \operatorname{Rang}(L_M) = \dim \operatorname{Bild}(L_M)$$

$$= \dim LH(\{a_1, \dots, a_n\})$$

Bsp:

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 2 :$$

$a_3 = 2a_1 + a_2$

$a_4 = 2a_1 - a_2$

$\{a_1, a_2\}$ ist lin. unabh.

3.53 Folg: Eine $n\times n$-Matrix ist genau dann invertierbar, wenn $\operatorname{Rang}(M) = n$

Beweis: M invertierbar $\Leftrightarrow L_M : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ bijektiv

$\Leftrightarrow$ (ii) aus 3.51

$\Leftrightarrow$ (iii) aus 3.51 $\square$

3.54 Satz: Sei das LGS $Ax = b$ gegeben (A $m\times n$-Matrix) und $(A\ b)$ die <u>erweiterte Koeffizientenmatrix</u>. Dann sind äquivalent:

(i) $A \cdot x = b$ ist lösbar

(ii) $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\underbrace{A\ b}_{m \times (n+1)\text{-Matrix}})$

<u>Beweis:</u> (i) $\Leftrightarrow b \in \text{Bild}(L_A)$

$\overset{3.36}{\Leftrightarrow} b \in LH(\{\underset{\uparrow\ \text{Spaltenvektoren}}{a_1, \dots, a_m}\})$

$\Leftrightarrow \underbrace{LH(\{a_1, \dots, a_m\})}_{\dim(\quad) = \text{Rang}(A)} = \underbrace{LH(\{a_1, \dots, a_m, b\})}_{\dim(\dots) = \text{Rang}(A\ b)}$

$\square$

<u>Beispiel:</u> $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$ lin. unabh. $\Rightarrow \text{Rang}(M) = 2$

$\overset{3.53}{\Rightarrow}$ M ist invertierbar

Gesucht M^{-1}: Ansatz: $M^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$M \cdot M^{-1} = E_2 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} \\ 4 \cdot a_{11} + 9 a_{21} & 4 a_{12} + 9 a_{22} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} + 2a_{21} = 1 & a_{12} + 2a_{22} = 0 \quad |\cdot(-4) \\ 4a_{11} + 9a_{21} = 0 & 4a_{12} + 9a_{22} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} + 2a_{21} = 1 & a_{12} + 2a_{22} = 0 \\ a_{21} = -4 & a_{22} = 1 \quad |\cdot(-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = 9 & a_{12} = -2 \\ a_{21} = -4 & a_{22} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Kürzere Schreibweise:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-4) \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-2) \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{matrix}}_{M} \quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{E_2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{E_2} \quad \underbrace{\begin{matrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{matrix}}_{M^{-1}}$$

3.55 Berechnung inverser Matrizen:

Sei M eine $n \times n$-Matrix. Schreibe $(M|E_n)$. Wende Gauß-Algorithmus an, bis links vom Trennstrich E_n steht. Dann steht rechts vom " M^{-1}.

$$(M|E_n) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (E_n|M^{-1})$$

Tritt in einem Schritt links vom Trennstrich eine Null-Zeile auf, so ist M nicht invertierbar.

... möglich geeigneter
... insbesondere:

... heißen ähnlich,
... bare $n \times n$-Matrix

3.6 Basiswechsel

3.56 Def. Sei V ein VR mit Basen B, B'.
Dann heißt $S := M^{B',B}_{Id_V}$ die Basiswechselmatrix von B auf B'.

3.57 Eigenschaften: Sind $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $B' = \{c_1, \dots, c_n\}$ und

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot b_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot c_j \iff v_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \wedge v_{B'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

so können die x_j und y_j ineinander umgerechnet werden durch

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{B'} = M^{B',B}_{Id_V} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B \text{ und } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B = M^{B,B'}_{Id_V} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{B'}$$

2) S ist invertierbar: $S^{-1} = M^{B,B'}_{Id_V}$, denn

$$S \cdot S^{-1} = M^{B',B}_{Id_V} \cdot M^{B,B'}_{Id_V} = M^{B',B'}_{Id_V} = E_n$$

3) Ist $L: V \to V$ linear, so ist

$$\underbrace{M_L^{B',B'}}_{B} = \underbrace{M^{B',B}_{Id_V}}_{S} \cdot \underbrace{\underbrace{M_L^{B,B}}_{A} \cdot \overbrace{M^{B,B'}_{Id_V}}^{S^{-1}}}_{= M_L^{B,B'}}$$

4) Allgemeiner: $L: U \to V$ linear, B, B' Basen von U, C, C' Basen von V. Dann

$M_L^{C',B}$

$M_L^{C,B'}$

$\underbrace{M_L^{C',B'}}_{B}$

Beispiele

$\Rightarrow M^{E,B'}_{Id_V}$

$M^{B',E}_{Id_V}$

$$M_L^{C',B} = M_{Id_V}^{C',C} \cdot M_L^{C,B}$$

$$M_L^{C,B'} = M_L^{C,B} \cdot M_{Id_V}^{B,B'}$$

$$\underbrace{M_L^{C',B'}}_{B} = \underbrace{M_{Id_V}^{C',C}}_{S} \cdot \underbrace{M_L^{C,B}}_{A} \cdot \underbrace{M_{Id_V}^{B,B'}}_{R^{-1}}$$

Beispiele 1) $V = \mathbb{R}^3$, $B = E = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

$B' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} \right\} = \{ b_1', b_2', b_3' \}$

$$\Rightarrow M_{Id_V}^{E,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_{Id_V}^{B',E} = \left(M_{Id_V}^{E,B'} \right)^{-1} \underset{\text{mit Gauß}}{\overset{\text{invertieren}}{=}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $V = \mathbb{R}^2$, $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}_{M_L^{E,E}} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

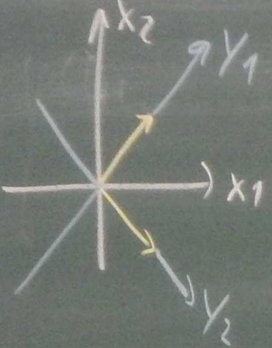
Sei $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\}$. Frage: $M_L^{B,B}$?

$$M_{Id_{\mathbb{R}^2}}^{E,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{Id_{\mathbb{R}^2}}^{B,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \overset{\text{Gauß-Alg.}}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_L^{B,B} = M_{Id}^{B,E} \cdot M_L^{E,E} \cdot M_{Id}^{E,B}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$



In dem neuen Koordinaten-system ist L besonders einfach: $b_1 \mapsto 4 b_1$, $b_2 \mapsto 6 b_2$, also Streckung der Basis-vektoren mit versch. Faktoren.

Hauptproblem der lin. Alg: Finde zu gegebenem $L: V \to V$ eine Basis B, so dass $M_L^{B,B}$ besonders einfach ist.

<u>3.58 Def</u>: 1) Zwei $m \times n$-Matrizen A, B heißen <u>äquivalent</u>, wenn es invertierbare Matrizen S $(m \times m)$ und R $(n \times n)$ gilt, so dass $B = S \cdot A \cdot R^{-1}$. D.h.

A und B beschreiben bezüglich geeigneter Basen die selbe Abb. Insbesondere: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B)$

2) Zwei $n \times n$-Matrizen A, B heißen <u>ähnlich</u>, wenn es eine invertierbare $n \times n$-Matrix S gilt, so dass $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$

<u>3.59 Satz</u>: Sei M eine $m \times n$-Matrix. Die Anwendung des Gauß-Algorithmus ändert den Rang einer Matrix nicht. Insbesondere: $\text{Rang}(M) =$ max. Anzahl linear unabh. Zeilen. (Spaltenrang = Zeilenrang)

...glich geeigneter
...besondere:

...eißen ähnlich,
...e $m \times n$-Matrix

...n-Matrix. Die
...-Algorithmus
...Matrix nicht.
... maxe Anzahl
...rang = Zeilenrang)

Beweisskizze: 1) Vertauschung 1. mit 2. Zeile:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} M \cdot E_m \text{ äquivalent zu } M$$

2) Gauß Algorithmus

$$M \underset{\text{nach 1)}}{\text{äquivalent}} \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{1 \; 0 \cdots 0}^{k \text{ Spalten}} & 0 \cdots 0 \\ 0 \; \ddots & \\ 0 \cdots 0 \; 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots & 0 \\ 0 \cdots & 0 \\ 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Rang} = k} \Big\} k \text{ Zeilen}$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix}_{B'} = M_{\ldots}^{B\ldots}$$

2) S ist invert...

$$S \cdot S^{-1} = M_{\ldots}$$

3) Ist $L: V \to V$...

$$\underbrace{M_L^{B',B'}}_{B} = M\ldots$$

4) Allgemeiner: