3.74 Bem: Die Abb.

$$P: V \to U \; : x \mapsto \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_j \rangle \cdot e_j$$

heißt orthogonale Projektion auf U.

3.10 Die adjungierte Matrix

3.75 Def: Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{z.B. } B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -2 & 3 \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}$$

Dann heißt

$$A^* := \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} & \cdots & \overline{a}_{m1} \\ \vdots & & & \\ \overline{a}_{1n} & \cdots & & \overline{a}_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{z.B. } B^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1-i \\ -i & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

die zu A adjungierte Matrix und

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{z.B. } B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1+i \\ i & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

die zu A transponierte Matrix.

3.76 Def: Eine $n \times n$-Matrix A heißt

1) selbstadjungiert, falls $A^* = A$

2) <u>symmetrisch</u>, falls $A^T = A$,

3) <u>unitär</u>, falls $A^* = A^{-1}$. Im Fall $K = \mathbb{R}$ heißt A auch <u>orthogonal</u>, dann $A^T = A$

<u>377 Satz</u>: Sind B, C zwei ONBen von V, so ist $M^{C,B}_{id}$ unitär, d.h. die inverse Matrix ist besonders einfach zu berechnen:

$$\underbrace{\left(M^{C,B}_{id}\right)^{-1}}_{=M^{B,C}_{id}} = \left(M^{C,B}_{id}\right)^*$$

<u>Beispiele</u>: 1) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} \right\}$

$C = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$.

$$\Rightarrow \left(M^{C,B}_{id}\right)^* \cdot M^{C,B}_{id} = \begin{array}{c} b_1\{ \\ b_2\{ \\ b_3\{ \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{2}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & 0 & -\frac{2}{\sqrt6} \\ -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} \end{pmatrix} \\ \quad \underbrace{}_{b_1} \quad \underbrace{}_{b_2} \quad \underbrace{}_{b_3} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle b_1, b_1\rangle = 1 & \langle b_1, b_2\rangle = 0 & 0 \\ \langle b_2, b_1\rangle = 0 & \langle b_2, b_2\rangle = 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

$$\Rightarrow \left(M^{C,B}_{id}\right)^* = \left(M^{C,B}_{id}\right)^{-1}$$

d.h. $M_{2d}^{C,B}$, $\left(M_{2d}^{C,B}\right)^*$ sind unitär

Unitäre Matrizen enthalten als Spaltenvektoren eine ONB

" " " " Zeilenvektoren " "

2) Falls $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ist jede selbstadj. Matrix auch symmetrisch und umgekehrt.

$$A=\begin{pmatrix}1&5&6\\5&2&7\\6&7&3\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=A,\ A \text{ ist symmetrisch}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow A^T\neq A,\ A \text{ ist nicht symmetrisch}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1+i\\1-i&2\end{pmatrix} \Rightarrow A^*=A,\ A^T\neq A,\ A \text{ selbstadj., nicht symmetrisch}$$

3.78 Satz: Seien $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{K}^m}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{K}^n}$ die Standard-Skalarprodukte, und A eine $m\times n$-Matrix. Dann

$$\forall x\in\mathbb{K}^n\ \forall y\in\mathbb{K}^m: \langle A\cdot x,y\rangle_{\mathbb{K}^m}=\langle x,A^*\cdot y\rangle_{\mathbb{K}^n}$$

Beweis durch Nachrechnen.

3.79 Folg: 1) Ist A selbstadj. $n\times n$-Matrix, so gilt

$$\forall x,y\in\mathbb{K}^n: \langle Ax,y\rangle_{\mathbb{K}^n}=\langle x,Ay\rangle_{\mathbb{K}^n}$$

2) Ist A unitär, so gilt:

$$\forall x,y\in\mathbb{K}^n: \langle A\cdot x,A\cdot y\rangle_{\mathbb{K}^n}=\langle x,\overbrace{A^*}^{A^*=A^{-1}}\cdot A\cdot y\rangle=\langle x,y\rangle_{\mathbb{K}^n}$$

Insbes.: $\|Ax\|_2=\|x\|_2$. Eine unitäre Matrix erhält Längen und Winkel.

3.11 Die adjungierte Abbildung

3.80 Def u Satz: Sei $L: V \to W$ lin. Dann exist genau eine lin Abb $L^*: W \to V$, so dass

$$\forall v \in V \ \forall w \in W: \langle Lv, w \rangle_W = \langle v, L^* w \rangle_V$$

L^* heißt adjungierte Abb. zu L. Ist B eine ONB von V und C eine ONB von W, so gilt

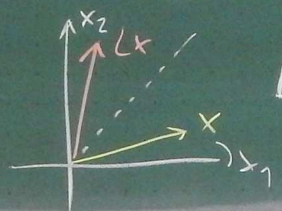
$$M_{L^*}^{B,C} = \left(M_L^{C,B}\right)^*$$

Beisp: 1) $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{= M_L^{E_2, E_3}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}$

$L^*: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}_{= \left(M_L^{E_2,E_3}\right)^* = M_{L^*}^{E_3,E_2}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 4y_2 \\ 2y_1 + 5y_2 \\ 3y_1 + 6y_2 \end{pmatrix}$

Nachrechnen $\langle Lx, y \rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle x, L^* y \rangle_{\mathbb{R}^3}$

2) $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$



L: Spiegelung an 1. Winkelhalb.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L^* = L$$

3) $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot x$

L: Drehung um 0 mit Winkel φ im Gegenuhrzeigersinn

$$L^* : x \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix}} \cdot x$$

: L^* ist Drehung um 0 mit Winkel φ im Uhrzeigersinn

$\Rightarrow L^* \circ L = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, $L^* = L^{-1}$

4) Ist B eine ONB von V, $\dim V = n$, $M_L^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow M_{L^*}^{B,B} = \left(M_L^{B,B}\right)^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \overline{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Dann: $L^* = L \Leftrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$L^* = L^{-1} \Leftrightarrow |\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| = 1$

denn $M_{L^*}^{B,B} \cdot M_L^{B,B} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\lambda_2|^2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} E_n$

Achtung: L^* existiert immer, auch wenn L^{-1} nicht exist.

3.81 Eigenschaften: Seien $L: V \to W$, $K: W \to U$ lin.

Dann: 1) $(L^*)^* = L$

2) $(K \circ L)^* = L^* \circ K^*$. Reihenfolge dreht sich um!

3) $\mathrm{Kern}(L) = \mathrm{Bild}(L^*)^\perp := \{x \in V \mid \forall y \in \mathrm{Bild}(L^*): \langle x, y \rangle = 0\}$

4) $\mathrm{Rang}(L^*) = \mathrm{Rang}(L)$

Beweis: 1) Für $x \in V$, $y \in W$ gilt

$$\langle Lx, y \rangle_W = \langle x, L^* y \rangle_V = \langle (L^*)^* x, y \rangle_W$$

$$\Rightarrow \forall y \in W: \langle Lx - (L^*)^* x, y \rangle = 0$$

$$\overset{3.6,3)}{\Rightarrow} Lx - (L^*)^* x = 0$$

$$\overset{x \in V \text{ bel.}}{\Rightarrow} L = (L^*)^*.$$

2) $\langle (K \circ L) x, z \rangle_U = \langle x, (K \circ L)^* z \rangle_V$

$\quad \|$

$\langle K(L(x)), z \rangle_U = \langle L(x), K^* z \rangle_W = \langle x, L^*(K^* z) \rangle_V$

$$\overset{3.6,3)}{\Rightarrow} (K \circ L)^*(z) = L^*(K^*(z)).$$

3.82 Def: Eine Abb. $L: V \to V$ heißt

1) __normal__, falls $L \circ L^* = L^* \circ L$

2) __unitär__, falls $L^* = L^{-1}$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt L

dann auch orthogonal.

(L unitär $\Rightarrow$ L normal: $L \circ L^{-1} = L^{-1} \circ L = E_n$)

3) <u>selbstadjungiert</u>, falls $L^* = L$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ heißt L dann auch symmetrisch

(L selbstadj. $\Rightarrow$ L normal)

<u>Beispiel</u>: $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot x$

$$L^*(x) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = -L(x)$$

$\Rightarrow \begin{cases} L \text{ nicht selbstadj., } L \text{ nicht unitär, da Spalten} \\ L \text{ ist normal. } L \circ L^* = -L \circ L = L^* \circ L \end{cases}$ (keine ONB)

383 <u>Eigenschaften</u>: Für $L: V \to V$ lin. sind äquivalent:

(i) L ist unitär

(ii) $\forall u, v \in V: \langle Lu, Lv \rangle = \langle u, v \rangle$. Insbes. ist L Längen- und Winkel-erhaltend

(iii) L ist <u>isometrisch</u>: $\forall u \in V: \|Lu\|_2 = \|u\|_2$

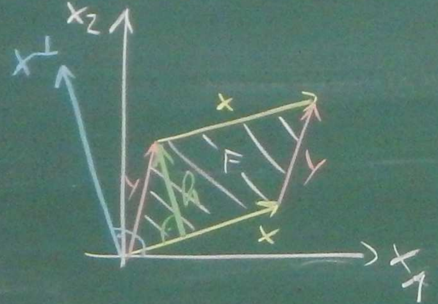
(iv) L transformiert ONBen in ONBen.

(v) Es exist. eine ONB, so dass die Spalten von $M_L^{B,B}$ eine ONB des $\mathbb{K}^n$ bilden ($n = \dim(V)$)

(vi) Für alle ONBen B bilden die Spalten von $M_L^{B,B}$ eine ONB des $\mathbb{K}^n$.

3.12 Determinanten

Fläche eines Parallelogrammes im $\mathbb{R}^2$:



$$F = \|x\|_2 \cdot \|h\|_2$$

Bestimme h durch

$$y = \lambda \cdot x + \underbrace{\mu \cdot x^{\perp}}_{=h}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{=y} = \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{=x} + \mu \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}}_{=x^{\perp}}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{y_1 x_1 + y_2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\Rightarrow F = \|x\|_2 \, \|\mu \cdot x^{\perp}\|_2$$
$$= \|x\|_2 \cdot |\mu| \cdot \|x^{\perp}\|_2$$
$$= |\mu| \cdot \|x\|_2^2$$
$$= |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$