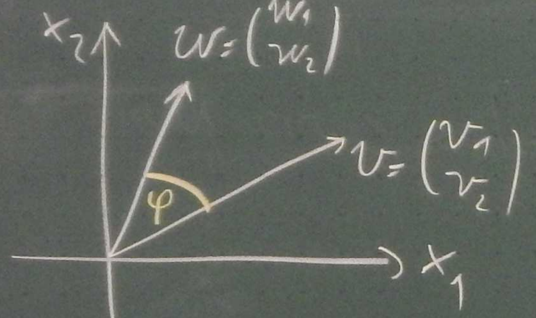
Beispiel: $V=\mathbb{R}^2$



$$\cos(\varphi) = \frac{v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}\,\sqrt{w_1^2+w_2^2}} = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|_2\, \|w\|_2}$$

$$\varphi \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \iff \langle v, w\rangle = 0$$

$$:\iff v \perp w$$

369 Satz: Sei J Indexmenge und $(v_i)_{i\in J}$ ein Orthogonalsystem. Dann ist $\{v_i : i \in J\}$ lin. unabh.

Beweis: Sei $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}$ endliche Teilmenge und $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j} = 0$. Für z.B. $j=1$ gilt

$$0 = \langle 0, v_{i_1}\rangle = \left\langle \sum \dots, v_{i_1}\right\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle v_{i_j}, v_{i_1}\rangle}_{=0 \text{ für } j \neq 1} = \lambda_1 \underbrace{\langle v_{i_1}, v_{i_1}\rangle}_{=\|v_{i_1}\|_2^2 \neq 0}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

Genauso $\lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0$. $\square$

<u>Beispiel</u>: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \{ \ell_1, \ell_2, \ell_3 \}$

ist Basis des $\mathbb{R}^3$.

Gesucht: ONB $\{e_1, e_2, e_3\}$, so dass

$LH\{\ell_1\} = LH\{e_1\}$,

$LH\{\ell_1, \ell_2\} = LH\{e_1, e_2\}$

$LH\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\} = LH\{e_1, e_2, e_3\}$ ← automatisch erfüllt im $\mathbb{R}^3$

$e_1 := \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|e_1\|_2 = 1$

$f_2 := \ell_2 - \langle \ell_2, e_1 \rangle \cdot e_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} LH\{f_2, e_1\} = LH\{\ell_2, \ell_1\} \\ f_2 \perp e_1 : \langle f_2, e_1 \rangle = \langle \ell_2 - \langle \ell_2, e_1 \rangle e_1, e_1 \rangle \\ \quad = \langle \ell_2, e_1 \rangle - \langle \ell_2, e_1 \rangle \underbrace{\langle e_1, e_1 \rangle}_{= \|e_1\|_2 = 1} \\ \quad = 0 \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}}_{= \frac{1}{3}(2+1+3) = 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ -1+2 \\ 3-2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Setze $e_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{e_1, e_2\} \text{ ist ONS} \\ LH\{e_1, e_2\} = LH\{b_1, b_2\} \end{cases}$$

$$f_3 := b_3 - \langle b_3, e_1\rangle \cdot e_1 - \langle b_3, e_2\rangle \cdot e_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} LH\{f_3, e_1, e_2\} = LH\{b_3, b_1, b_2\} \\ f_3 \perp e_1: \langle f_3, e_1\rangle = \langle b_3 - \langle b_3, e_1\rangle \cdot e_1 - \langle b_3, e_2\rangle \cdot e_2, e_1\rangle \\ \quad = \langle b_3, e_1\rangle - \langle b_3, e_1\rangle \cdot \underbrace{\langle e_1, e_1\rangle}_{=1} - \langle b_3, e_2\rangle \cdot \underbrace{\langle e_2, e_1\rangle}_{=0} \\ \quad = 0 \\ f_3 \perp e_2, \text{ denn } \langle f_3, e_2\rangle = \langle b_3 - \langle b_3, e_1\rangle e_1 - \langle b_3, e_2\rangle e_2, e_2\rangle \\ \quad = \langle b_3, e_2\rangle - \langle b_3, e_1\rangle \cdot \underbrace{\langle e_1, e_2\rangle}_{=0} - \langle b_3, e_2\rangle \cdot \underbrace{\langle e_2, e_2\rangle}_{=1} \\ \quad = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_3 = \begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix} - \underbrace{\Big\langle \begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{e_1} \Big\rangle}_{=\frac{1}{3}(1+3+5)=3} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{e_1} - \underbrace{\Big\langle \begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{e_2} \Big\rangle}_{=\frac{1}{2}(0-3+5)=1} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{e_2}$$

$$= \begin{pmatrix}1 - 3 - 0\\ -3 + 3 - 1\\ 5 - 3 - 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Setze $e_3 := \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{e_1, e_2, e_3\} \text{ ist ein ONS} \\ LH\{e_1, e_2, e_3\} = LH\{b_1, b_2, b_3\}. \end{cases}$$

370 Satz: Sei $\{v_1, v_2, \dots\} \subseteq V$ linear unabh.

Dann gibt es ein ONS $\{e_1, e_2, \dots\}$ mit

$\forall k \in \mathbb{N}$ mit $k \le \#\{v_1, \dots, v_n\}$:

$$LH\{e_1, \dots, e_k\} = LH\{v_1, \dots, v_k\}$$

Dieses ONS erhält man sukzessive durch das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren: $e_1 := \frac{1}{\|v_1\|_2} \cdot v_1$

$$f_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, e_j \rangle \cdot e_j \, , \quad e_k := \frac{1}{\|f_k\|_2} \cdot f_k$$

371 Koordinaten bezügl. ONB:

Sei $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine ONB von V.

Dann: 1) $\forall v \in V: v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, e_j \rangle \cdot e_j$

Oder anders geschrieben: $v_B = \begin{pmatrix} \langle v, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, e_n \rangle \end{pmatrix} \in K^n$

2) $\forall u, v \in V: \langle u, v \rangle = \langle u_B, v_B \rangle_{K^n}$

$$= \sum_{j=1}^{k} \langle u, e_j \rangle \overline{\langle v, e_j \rangle}$$

$$\left(\overset{\text{für Physiker}}{=} \sum_{j=1}^{n} \langle u, e_j \rangle \cdot \langle e_j, v \rangle \right)$$

Insbesondere: $\|u\|_2 = \langle u, u\rangle = \|u_B\|_{2,\mathbb{K}^n}$

$$= \sum_{j=1}^{n} |\langle u, e_j\rangle|^2$$

Parsevalsche Gleichung.

Beweis durch Nachrechnen.

3.72 Folg: Der Isomorphismus

$$L: \mathbb{K}^n \to V: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j$$

erhält das Skalarprodukt:

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{K}^n} = \langle L(x), L(y)\rangle_V$$

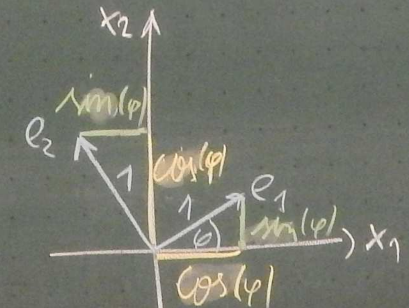
Und damit auch die Norm: $\mathbb{K}^n$ und V können als identisch angesehen werden.

Beisp: 1) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ +\cos\varphi \end{pmatrix} \right\}$

$$\left\| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \right\|^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \Rightarrow \|e_j\|_2 = 1$$

$$\langle e_1, e_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ +\cos\varphi \end{pmatrix} \right\rangle = -\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$\Rightarrow B$ ist ONB des $\mathbb{R}^2$



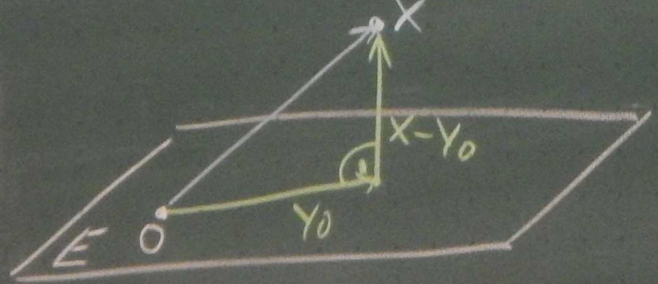
$\{e_1, e_2\}$ definiert ein um φ gedrehtes Koordinatensystem.

Letzter Satz: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow x_B = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \langle x, e_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi \\ -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Veranschaulichung: E sei Ursprungs-ebene im $\mathbb{R}^3$; $x \in \mathbb{R}^3 \setminus E$



Geometrie $\exists! y_0 \in E \; \forall y \in E : \|x - y_0\|_2 \leq \|x - y\|$

Für dieses y_0 gilt: $y_0 \in E \wedge x - y_0 \perp E$

3.73 Satz: Seien V ein VR mit Skalarprod., U ein endlichdimens. Unterraum, $\{e_1, \ldots, e_k\}$ ONB von U und $x \in V$ fest. Dann sind für $y_0 \in U$ äquivalent:

(i) $y_0 = \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_j \rangle \cdot e_j$

(ii) $x = y_0 + z$ mit $z \perp U$, d.h. $\forall y \in U : \langle z, y \rangle = 0$

(iii) $\forall y \in U : \|x - y\|_2 \geq \|x - y_0\|_2$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): $z = x - y_0 \overset{(i)}{=} x - \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_j \rangle \cdot e_j$

Sei $y \in \mathcal{U} \Rightarrow \langle z, y \rangle = \langle x - \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_j \rangle \cdot e_j, y \rangle$

$$= \langle x, y \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, y \rangle$$

$y \in \mathcal{U} \Rightarrow y = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \cdot e_l, \quad \lambda_l = \langle y, e_l \rangle$

$$\Rightarrow \langle z, y \rangle = \langle x, \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \cdot e_l \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_j \rangle \cdot \langle e_j, \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \cdot e_l \rangle$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \overline{\lambda_l} \langle x, e_l \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_j \rangle \underbrace{\sum_{l=1}^{k} \overline{\lambda_l} \underbrace{\langle e_j, e_l \rangle}_{= \begin{cases} 0 & \text{für } l \neq j \\ 1 & \text{für } l = j \end{cases}}}_{= \overline{\lambda_j} \cdot 1}$$

$$= 0$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $z = x - y_0 \perp \mathcal{U}$

Für $y \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\|x - y\|_2^2 = \|\underbrace{x - y_0}_{= z \perp \tilde{y}} + \underbrace{y_0 - y}_{= \tilde{y} \in \mathcal{U}}\|_2^2$$

$$\overset{\text{Pythagoras}}{=} \|x - y_0\|_2^2 + \underbrace{\|y_0 - y\|_2^2}_{\geq 0}$$

$$\geq \|x - y_0\|_2^2$$