

3.13 Diagonalisierung

Beisp: $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot x$

$$L \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{EV zu } \lambda_1$$

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{EW } \lambda_1 \\ \text{EW } \lambda_2 \end{matrix} \quad \text{EV zu } \lambda_2$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow M_L^{B,B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

3.97 Def. Sei $L: V \rightarrow V$ lin.

1) $\lambda \in K$ heißt Eigenwert (EW) von L , falls

$$\exists v \in V \setminus \{0\}: L(v) = \lambda \cdot v$$

Der Vektor v heißt Eigenvektor (EV) zu λ .

2) Die Menge $\sigma(L) := \{\lambda \in K: \lambda \text{ ist EW von } L\}$ heißt Spektrum von L .

3) Ist $\lambda \in K$ EW von L , so heißt der lin. Unterraum $E(\lambda) := \{v \in V: L(v) = \lambda \cdot v\}$

Eigenraum zu λ .

Beispiele: 1) $L(x) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot x$ $\sigma(L) = \{-5, 5\}$
 $E(5) = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

$$2) L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot x$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L} 2 \cdot e_3 \Rightarrow e_3 \text{ ist EV zum EW } \lambda_1 = 2$$

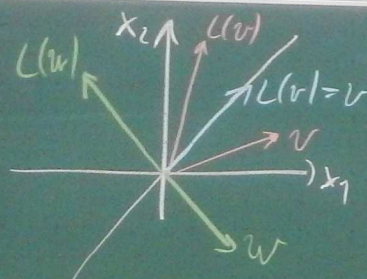
$$e_1 \text{ ist EV zum EW } \lambda_2 = 3$$

$$e_2 \text{ " " " " } \lambda_3 = -5$$

$$\Rightarrow \sigma(L) = \{-5, 2, 3\}$$

$$3) L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung am 1. Winkelhalbierenden



$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma(L) = \{-1, 1\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow M_L^{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

398 Satz: Sei $L: V \rightarrow V$ lin., $B = \{e_1, \dots, e_m\}$ Basis von V .
Äquivalent sind:

(i) B besteht nur aus EVen

(ii) $M_L^{B,B}$ hat Diagonalgestalt: $M_L^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$

und (i) und (ii) erfüllt, so gelten:

- $L(b_j) = \lambda_j \cdot b_j$ mit den λ_j -Werten aus $M_L^{B,B}$

- $M_L^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ für $h \in \mathbb{N}$

- Falls inverse L^{-1} existiert: $M_{L^{-1}}^{B,B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$

- $\det(L) = \det(M_L^{B,B}) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

Beweis: (i) $\Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\} \exists \lambda_j \in \mathbb{K} : L(b_j) = \lambda_j \cdot b_j$

$$\Leftrightarrow M_L^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ (ii)

□

399 Def: $L: V \rightarrow V$ heißt diagonalisierbar, falls eine Basis von V existiert, die nur EWe enthält.

3100 Beschreibung von EWe: Sei $L: V \rightarrow V$ lin. Dann äquivalent

(i) λ ist EW von L (ii) $\det(L - \lambda \cdot \text{id}) = 0$

Beweis: Sei B Basis von V , $\dim(V) = n$

(i) $\Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : L(v) = \lambda \cdot v$

$\Leftrightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : L(v)_B = M_L^{B,B} \cdot v_B = \lambda \cdot v_B = \lambda \cdot E_n \cdot v_B$

$\Leftrightarrow (M_L^{B,B} - \lambda \cdot E_n) \cdot v_B = 0$ hat nichttriv. Lösung

3.91 $\Leftrightarrow \det(M_L^{B,B} - \lambda \cdot E_n) = 0$

3.92 $\Leftrightarrow \det(L - \lambda \cdot \text{id}) = 0$

□

Beisp: 1) $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto \begin{pmatrix} 11 & -9 & 9 \\ 15 & -13 & 15 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot x$

$$\det(L - \lambda \text{id}) = \det \left(\begin{pmatrix} 11 & -9 & 9 \\ 15 & -13 & 15 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} 11-\lambda & -9 & 9 & | & 11-\lambda & -9 \\ 15 & -13-\lambda & 15 & | & 15 & -13-\lambda \\ 3 & -3 & 5-\lambda & | & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

$$\stackrel{!}{=} 0 \text{ (letzter Satz)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1/2} = 2, \lambda_3 = -1, \sigma(L) = \{-1, 2\}$$

Berechne die EVen:

$$\lambda_{1/2} = 2: L(v) = 2 \cdot v \Leftrightarrow (L - 2E_3) \cdot v = 0$$

$$\text{Löse } \begin{pmatrix} 9 & -9 & 9 & | & 0 \\ 15 & -15 & 15 & | & 0 \\ 3 & -3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{9} \mid \cdot (-\frac{15}{9}) \mid \cdot (-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_3 = t, x_2 = s \Rightarrow x_1 = s - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{Eigenraum } E(2) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda_3 = -1: \begin{pmatrix} 12 & -9 & 9 & | & 0 \\ 15 & -12 & 15 & | & 0 \\ 3 & -3 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{3} \mid \cdot (-12) \mid \cdot (-15)} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -15 & | & 0 \\ 0 & 3 & -15 & | & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot (-1)} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -15 & | & 0 \\ 0 & 3 & -15 & | & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = t \Rightarrow x_2 = 5t, x_1 = x_2 - 2x_3 = 3t$$

$$\Rightarrow \text{Eigenraum } E(-1) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist Basis aus EVen}$$

$$M_L^{B,B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2) L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot x$$

$$\det(L - \lambda \text{Id}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 0 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 4$$

$$\text{EV zum EW } \lambda = 4: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L besitzt keine Basis aus EVen, ist nicht diagonalisierbar.

3.101 Satz und Def. Sei $L: V \rightarrow V$ lin, $\dim(V) = n$

1) $p_L: \lambda \mapsto p_L(\lambda) := \det(L - \lambda \text{Id})$ ist ein Polynom n -ten Grades in λ und heißt charakteristisches Polynom.

2) Ist $A = M_L^{B,B}$, so gilt $p_L(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_n)$

3) Mit $A = (a_{ij})$ gilt $p_L(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \dots + \det(A) \cdot \lambda^0$. p_L ist unabhängig von der gewählten Basis. Also ist auch die Spur von A : $\text{Sp}(A) := \text{tr}(A) := a_{11} + \dots + a_{nn}$ unabhängig von B (A hängt von der Basis ab!).

3.102 Folg. Für $L: V \rightarrow V$ lin gelten:

- 1) $\lambda \in K$ ist EW von $L \Leftrightarrow p_L(\lambda) = 0$
- 2) Falls $K = \mathbb{C}$: L besitzt mind. einen EW
- 3) L besitzt höchstens n verschiedene EWe
da p_L höchstens n " Nullst. besitzt.

3.103 Def. Sei $\lambda \in K$ EW von L . Dann heißt
 $n_g(\lambda) := \dim(E(\lambda)) = \dim(\{v \in V: L(v) = \lambda \cdot v\})$

geometrische Vielfachheit von λ und

$n_a(\lambda) :=$ Ordnung der Nullst. λ von p_L

algebraische Vielfachheit von λ .

Beisp. 1) $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: x \mapsto \begin{pmatrix} 11 & -9 & 9 \\ 15 & -13 & 15 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot x$

$$p_L(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1) \Rightarrow m_a(2) = 2, m_a(-1) = 1$$

$$E(2) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow n_g(2) = 2$$

$$E(-1) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow n_g(-1) = 1$$

2) $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: x \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot x$

$$p_L(\lambda) = (\lambda - 4)^2 \Rightarrow m_a(4) = 2$$

$$E(4) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow n_g(4) = 1 < m_a(4)$$

eindimensional

3.104 Satz: Ist $\lambda \in W$ von L , so gilt $n_g(\lambda) = m_d(\lambda)$

3.105 Satz: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise versch. EWe von L mit EVen $v_1, \dots, v_k$, so ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ lin. unabh. "Eigenvektoren zu verschiedenen EWe sind lin. unabh."

Beweis: Induktion nach k :

Induktionsanf. $k=1$: $\{v_1\}$ ist lin. unabh., da $v_1 \neq 0$

Induktionsschritt: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ paarweise versch. EWe mit EVen $v_1, \dots, v_{k+1}$.

Sei $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$. Zu zeigen $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k+1} = 0$

$$\Rightarrow 0 = (L - \lambda_{k+1}) (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1})$$

$$= \underbrace{\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} v_1 + \dots + \underbrace{\alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} v_k + \underbrace{\alpha_{k+1} (\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})}_{=0} v_{k+1}$$

Ind. voraus.

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

$$v_{k+1} \neq 0 \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0.$$

□

3.106 Hauptsatz: Für $L: V \rightarrow V$ lin. sind äquivalent:

(i) L ist diagonalisierbar

(ii) μ_L zerfällt über K in Linearfaktoren:

$$\mu_L(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_m)$$

Und für jede Nullstelle λ_j gilt $m_d(\lambda_j) = m_g(\lambda_j)$