3.84 Def: Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$. Die orientierte Fläche des von x, y aufgespannten Parallelogramms ist def. durch

$$F(x,y) := x_1 y_2 - x_2 y_1 =: \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$\ominus$ $\oplus$

3.85 Folg: Es gelten

1) $F(x,y) = 0 \iff \{x,y\}$ lin abh.

2) $F(e_1, e_2) = 1$

3) $F(\lambda \cdot x, y) = \lambda F(x,y) = F(x, \lambda \cdot y)$

$F(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^2 F(x,y)$

4) $F(x+y, z) = F(x,z) + F(y,z)$

$F(x, y+z) = F(x,z) + F(x,y)$

5) $F(y,x) = -F(x,y)$

3.85 Def: Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^3$. Dann heißt

$$V(x,y,z) := \underbrace{x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3}_{} \quad \oplus\text{-Terme}$$

$$\underbrace{- z_1 y_2 x_3 - x_1 z_2 y_3 - y_1 x_2 z_3}_{} \quad \ominus\text{-Terme}$$

$$=: \begin{vmatrix} x_1 & \oplus\; y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} x_1 & \ominus\; y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{matrix}$$

Regel von Sarrus

das <u>orientierte Volumen</u> des von x, y, z aufgespannten Parallelepipeds.

<u>3.8.7 Def</u>: Es sei $M_{n,n}(\mathbb{K})$ die Menge aller $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$. Eine Abb. $\det : M_{n,n} \to \mathbb{K} : A \mapsto \det(A) = |A|$

heißt <u>Determinante</u>, falls sie folgende Eigenschaften besitzt: Ist $A = (a_1 \dots a_n)$ mit Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n$, so gelten:

(D1) $\det(\underbrace{e_1, e_2, \dots, e_n}_{E_n}) = 1$ $\quad \left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

(D2) Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt: Die Abb. ist linear bezüglich der k-ten Spalte:

$$\det(a_1 \dots a_{k-1} \; (\alpha \cdot a_k + \beta b_k) \; a_{k+1} \dots a_n)$$
$$= \alpha \det(a_1 \dots a_k \dots a_n) + \beta \det(a_1 \dots a_{k-1} \, b_k \, a_{k+1} \dots a_n)$$

(D3) Für alle Paare (k,j) mit $k \neq j$ gilt

$$\det(a_1 \dots a_k \dots a_j \dots a_n)$$

$$= -\det(a_1 \dots a_{k-1}\, a_j\, a_{k+1} \dots a_{j-1}\, a_k\, a_{j+1} \dots a_n)$$

Vertauschen zweier Spalten ändert nur das Vorzeichen, sonst nichts.

3.88 Bem: Man kann beweisen, dass es genau eine solche Abb. gilt.

Beisp: 1) $\det\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}2\\0\\0\end{matrix}}_{2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} & \begin{matrix}0\\-5\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\\3\end{matrix}\end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} 2\cdot\det\begin{pmatrix} \begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix}0\\-5\\0\end{matrix}}_{=-5\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} & \underbrace{\begin{matrix}0\\0\\3\end{matrix}}_{=3\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}\end{pmatrix}$

$$\overset{(D2)}{=} 2\cdot(-5)\cdot 3 \det\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=E_3} \overset{(D1)}{=} -30\cdot 1$$

2) $\det\begin{pmatrix} \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}}_{=0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}\end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} 0\cdot\det\begin{pmatrix}1&4&0\\2&5&0\\3&6&0\end{pmatrix} = 0$

3) $\det\begin{pmatrix}1&4&4\\2&5&5\\3&6&6\end{pmatrix} \overset{(D3)}{=} -\det\begin{pmatrix}1&4&4\\2&5&5\\3&6&6\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(\;''\;) = 0$

389 Satz: Sei $A = (a_1 \dots a_n)$ eine $n \times n$-Matrix.

1) $\exists k \in \{1, \dots, n\} : a_k = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$

2) A enthält zwei gleiche Spalten: $a_k = a_j$ für ein Paar (k, j) mit $k \neq j \Rightarrow \det(A) = 0$

3) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{n} a_{jj}$

4) Addition des Vielfachen einer Spalte zu einer anderen ändert Wert der Det nicht:

$\det((a_1 + \lambda a_2)\ a_2\ a_3 \dots a_n) =$

$\overset{(D3)}{=} \det(a_1\ a_2 \dots a_n) + \lambda \cdot \underbrace{\det(a_2\ a_2\ a_3 \dots a_n)}_{= 0 \text{ nach } 2)}$

$= \det(A)$.

390 Satz: Sei $A = (a_1 \dots a_n)$ eine $n \times n$-Matrix. Dann:

$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \{a_1, \dots, a_n\}$ ist lin. abh.
$\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A) < n$

bzw. äquivalent

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \{a_1, \dots, a_n\}$ lin. unabh.
$\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A) = n$

Beweis: 1) "$\Leftarrow$" Sei $\{a_1, \dots, a_n\}$ lin. abh.

"$\Leftarrow$" $\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_n \cdot a_n = 0$, nicht alle $\lambda_i = 0$

O.B.d.A $\lambda_1 \neq 0$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{-1}{\lambda_1}\left(\lambda_2 \cdot a_2 + \lambda_3 \cdot a_3 + \dots + \lambda_n \cdot a_n\right)$$

$$\Rightarrow \det(A) \overset{3.89,4)}{=} \det\Big(\underbrace{a_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot a_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot a_3 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot a_n}_{\text{Nullspalte}}, a_2, a_3, \dots, a_n\Big)$$

$$\overset{3.89,1)}{=} 0$$

2) Rückrichtung ohne Beweis

3.91 Lin. Gleichungssysteme: Sei A eine $n \times n$-Matrix.

1) Das LGS $A \cdot x = 0$ besitzt nicht-triviale Lösungen genau dann, wenn $\det(A) = 0$.

2) Das LGS $A \cdot x = b$ besitzt für jedes $b \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung und diese ist eindeutig genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$.

3.92 Rechenregeln: 1) $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$

2) Falls A invertierbar: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

3) $\det(A^T) = \det(A)$. Insbes: Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert nicht den Wert von $\det(A)$.

3.93 Laplace-Entwicklung

Für $A = (a_{ij})$ setze

$$A_{ij} := \begin{pmatrix} & a_{1j} & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & a_{nj} & \end{pmatrix}$$

(Streiche i-te Zeile und j-te Spalte)

Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

(Entwicklung nach i-ter Zeile), und für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

(Entwicklung nach j-ter Spalte).

Beispiele:

1) $n=1$: $\det(a_{11}) \overset{(D2)}{=} a_{11} \det(1) \overset{(D1)}{=} a_{11} \cdot 1$

2) $n=2$: $\det\begin{pmatrix} a_{11} & \ominus\, a_{12} \\ a_{21} & \oplus\, a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Mit Entwicklungssatz:

$$\begin{vmatrix} \oplus\, a_{11} & \ominus\, a_{12} \\ \ominus\, a_{21} & \oplus\, a_{22} \end{vmatrix} = + a_{11} \det(a_{22}) - a_{12} \det(a_{21})$$

(Entwicklung nach 1. Zeile)

3) $n=3$: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix}$

$= 10 + 12 + (-4) - (-6) - 8 - 10$

$= 6$

Oder Entwicklung nach 3. Zeile

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +(-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot|\ldots| + 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot(0\cdot 1 - 4\cdot 3) + 1\,(2\cdot 3 - 0(-5))$$

$$= 18$$

Geschickter: Entwicklung nach 2. Spalte

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -0\cdot|\ldots| + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot|\ldots|$$

$$= 3(2+4) = 18$$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ $|\cdot(-3)$ $|\cdot(-2)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Entwickle nach 1. Spalte $= 1\begin{vmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ Sarrus anwenden $= -48$

3.94 Geometrische Bedeutung:

Für $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ ist

$$V(v_1, \ldots, v_n) := \det(v_1\ v_2 \ldots v_n)$$

das orientierte Volumen des von den Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ aufgespannten Parallelepipeds. Ist A eine reelle $n \times n$-Matrix, so gilt

$$V(A \cdot v_1, \ldots, A \cdot v_n) = \det\underbrace{(A \cdot v_1 \ldots A \cdot v_n)}_{A \cdot (v_1\ v_2 \ldots v_n)}$$

$$= \det(A) \cdot \det(v_1 \ldots v_n)$$

d.h. $\det(A)$ gibt an, wie sich das Volumen unter der Abb. $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto A \cdot x$ verändert.

3.95 Def: Sei $L : V \to V$ lin. und B Basis von V. Dann ist die **Determinante** der Abb. L def. durch $|L| := \det(L) := \det(M_L^{B,B})$

3.96 Bem: Sind B, B' zwei Basen von V, so gilt $\det(M_L^{B',B'}) = \det(M_L^{B,B})$.