Sei M eine $n \times n$-Matrix und

$$L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : x \mapsto M \cdot x.$$

L heißt

1) normal, wenn
$L \circ L^* = L^* \circ L$ bzw. $M \cdot M^* = M^* \cdot M$.

2) unitär, falls $L^* = L^{-1}$ bzw. $M^* = M^{-1}$.

3) selbstadjungiert, falls $L^* = L$ bzw. $M^* = M$.
Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und L selbstadjungiert, dann ist
L bzw. M symmetrisch, d.h. $M^T = M$.

Satz 114: L normal $\Leftrightarrow$ L besitzt eine ONB aus EVen

Bsp. 2) $L: x \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1+i \\ 3 & 1-i & 5 \end{pmatrix}}_{M = M^*} \cdot x \Rightarrow L^* = L$

$\Rightarrow L$ normal

(L ist sogar selbstadjungiert)

3) $L: x \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{30} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{6} \\ 5/\sqrt{30} & 0 & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}}_{\text{Spalten bilden ONB des } \mathbb{R}^3} \cdot x \Rightarrow L^* = L^{-1}$

$\Rightarrow L$ ist normal

M ist unitär, da sie reell ist orthogonal

4) $L: x \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}}_{} \cdot x$

$M = 2 \cdot E_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} = 2E_3 + A$

$M^* = 2 \cdot E_3 - A$

$\Rightarrow M \cdot M^* = M^* \cdot M$,

$\Rightarrow L$ ist normal.

<u>3.116 Charakterisierung unitärer Abb.:</u> Sei V ein VR mit Skalarprod. über $\mathbb{C}$ und $L: V \to V$ lin. Dann äquivalent:

(i) L ist unitär

(ii) L ist normal und für alle EWe λ von L gilt: $|\lambda| = 1$.

Insbesondere ist jede unitäre Abb. diagonalisierbar und alle EWe liegen auf dem Einheitskreis.

L unitär $\Rightarrow L^* = L^{-1} \Rightarrow L$ normal

3.114 $\Rightarrow$ Es exist. ONB B aus EVen

$$\Rightarrow M_L^{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad M_{L^*}^{B,B} = \left(M_L^{B,B}\right)^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \overline{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{Id}^{B,B} = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix} = M_{L^* \circ L}^{B,B} = M_{L^*}^{B,B} \cdot M_L^{B,B}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & |\lambda_2|^2 & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}$$

3.117 Satz und Def: 1) $GL_n(\mathbb{K}) := \{L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \mid L$ lin. und bijekt.$\}$

$(GL_n(\mathbb{K}), \circ)$ bildet die lineare Gruppe.

2) $U(n) := \{L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \mid L$ ist unitär$\}$ bildet eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{C})$.

3) $GL_n(\mathbb{R})$ enthält folgende Untergruppen

a) Die orthogonale Gruppe $O(n) := \{L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid L$ ist orthogonal$\}$ $L^T = L^{-1}$

c) Die spezielle orthogonale Gruppe

$$SO(n) := \{ L \in O(n) : \det(L) = 1 \}$$

Bem: 1) $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ unitär

$\left.\begin{array}{l} 3.114 \\ 3.116 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Es exist. ONB aus EVen und $|\lambda| = 1$ für alle EWe

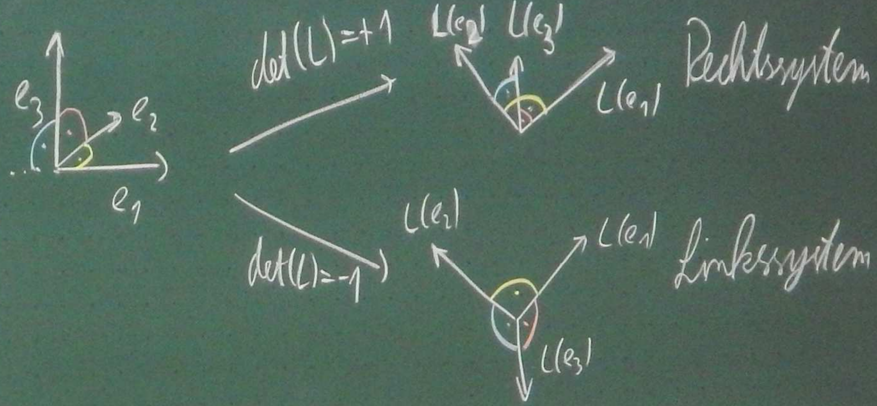
$$\Rightarrow \det(L) \overset{\text{def. Det}}{=} \det\left(M_L^{B,B}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\Rightarrow |\det(L)| = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow L$ ist invertierbar, insbes. $L \in GL_n(\mathbb{C})$

2) $\left.\begin{array}{l} L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \Rightarrow \det(L) \in \mathbb{R} \\ L \text{ orth} \Rightarrow L \text{ unitär} \Rightarrow |\det(L)| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \det(L) \in \{-1, +1\}$

3) Im $\mathbb{R}^3$: $L \in SO(3) \Rightarrow L$ erhält die Orientierung



3.118 Selbstadj. Abb.en: Sei V ein VR über $\mathbb{C}$ mit Skalarprod. und $L: V \to V$ lin. Dann äquiv.:

(i) L ist selbstadj. ($L^* = L$)

(ii) L ist normal und $\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist EW von } L\} \subseteq \mathbb{R}$

(iii) $\forall v \in V: \langle L(v), v \rangle \in \mathbb{R}$

Insbes. besitzt L eine ONB aus EVen, ist also diagonalisierbar. Im Satz 3.112 ist die Voraussetzung "L_M besitzt ONB aus EVen" automatisch erfüllt.

3.120 Symmetrische Abb.en: Sei $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n: x \mapsto A \cdot x$

Dann äquivalent:

(i) A bzw. L ist symmetrisch ($A^T = A$)

(ii) L besitzt ONB aus EVen und alle EWe von L sind reell.

Insbesondere zerfällt das char. Polynom p_L in reelle Linearfaktoren, und für jeden EW λ von L gilt $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.

3.121 Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$, $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2$

Frage: Ist q pos. definit?

z.B. $q(x) = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{M ist nicht diagonalisierbar}} \cdot x, x \right\rangle = b(x,x)$

Andere Wahl von B:

$q(x) = \frac{1}{2}\langle M\cdot x, x\rangle + \frac{1}{2}\underbrace{\langle M\cdot x, x\rangle}_{\substack{V \text{ reell} \\ = \langle x, M^T\cdot x\rangle = \langle M^T x, x\rangle}}$

$= \left\langle \frac{1}{2}\underbrace{(M+M^T)}_{= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} \cdot x, x \right\rangle$

$= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=: A \text{ symmetrisch}} \cdot x, x \right\rangle = b(x,x)$

$((M+M^T)^T = (M^T + (M^T)^T)$

$= M^T + M = M + M^T$

A hat EV $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum EW $\lambda_1 = 1$

" " " $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum EW $\lambda_2 = 3$

Setze $B := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ONB des $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow q(x) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x_B, x_B \right\rangle$

$x_B = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$

$= (x_1')^2 + 3\cdot(x_2')^2$

Insbes: q ist pos. definit.

3.16 Jordansche Normalform

EWe von $J_{\lambda_0}^{(k)}$:

$$p(\lambda) = \det\left(J_{\lambda_0}^{(k)} - \lambda \cdot E_k\right) = \begin{vmatrix} \cancel{\lambda_0 - \lambda} & \cancel{1} & & \cancel{0} \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & 1 & \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots \; 0 & \lambda_0 - \lambda \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach 1. Spalte $=$ $(\lambda_0 - \lambda) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda_0 - \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda_0 - \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 - \lambda \end{vmatrix}}_{(k-1)\times(k-1)\text{-Matrix}} + 0 + 0 + \ldots + 0$

$= \ldots = (\lambda_0 - \lambda)^k$

$\Rightarrow p$ hat nur die eine Nullst. $\lambda = \lambda_0$ mit Vielfachheit k

$\Rightarrow$ Einziger EW $\lambda = \lambda_0$ und $m_a(\lambda_0) = k$

EVen zu $\lambda = \lambda_0$: $J_{\lambda_0}^{(k)} \cdot v = \lambda_0 \cdot v \Leftrightarrow J_{\lambda_0}^{(k)} \cdot v = \lambda_0 \cdot E_k \cdot v$

$\Leftrightarrow \left(J_{\lambda_0}^{(k)} - \lambda_0 \cdot E_k\right) \cdot v = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot v = 0 \quad \Leftrightarrow v = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$

EVen zu $\lambda = \lambda_0$ spannen einen Raum der Dimension 1 auf

$\Rightarrow m_g(\lambda_0) = 1$

Beisp. zu 3.124: $V=\mathbb{R}^2$, $L: x \mapsto \begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot x$

EWe: $p_L(\lambda) = \begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)-(-1)$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^{2}$$

$\Rightarrow L$ hat nur den EW $\lambda=2$, $n_a(2)=2$

EVen zu $\lambda=2$: $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot v = 0 \Leftrightarrow v = t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

Wähle $v=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ als EV.

Weiterer Basisvektor w aus $(L-2E_2)w = v = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{array}\right) \Leftrightarrow w = t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

Wähle $t=0 \Rightarrow B = \left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ ist Basis und $\underbrace{M_L^{B,B} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}}_{\text{aus 3.124}}$

Wähle z.B. $t=2 \Rightarrow B = \left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}\right\}$ ist Basis

$M_{id}^{E,B} = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $M_{id}^{B,E} = \left(M_{id}^{E,B}\right)^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow M_L^{B,B} = \begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}2 & 7\\ 2 & 5\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Beispiel Jordansche Normalform: $L: \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ mit

$$M_L^{B,B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & 0 & 2 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ L hat die EWe:

$\lambda_1 = 2$, $m_a(2) = 5$, $m_g(2) = 2$

$\lambda_2 = 3$, $m_a(3) = 1$, $m_g(3) = 1$

$\lambda_3 = 4$, $m_a(4) = 2$, $m_g(4) = 1$

So oft kommt der EW in der Diagonalen vor

So viele Jordan-Blöcke gibt es zum EW λ

A hat EV