3.14 Sesquilinearformen

3.107 Def: Sei V ein VR über $\mathbb{K}$.

Eine Abb. $b: V \times V \to \mathbb{K}$ mit

$$b(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 b(v_1, w) + \lambda_2 b(v_2, w) \quad (*)$$

$$b(w, v) = \overline{b(v, w)} \quad (**)$$

heißt Sesquilinearform auf V. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, heißt b Bilinearform.

Beispiele: 1) $b(v, w) = \langle v, w \rangle$

2) $b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) := x_1 \overline{y_1}$

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b(x, x) = 0 \wedge x \neq 0$

$\Rightarrow b$ kein Skalarprodukt.

3) Sei $L: V \to W$ lin, selbstadjungiert und $b(v, w) := \langle L(v), w \rangle$.

b erfüllt $(*)$, da L linear

b erfüllt $(**)$:

$$b(w,v) = \langle L(w), v \rangle$$

$$\overset{\text{Def } L^*}{=} \langle w, L^*(v) \rangle$$

$$\overset{\text{selbstadj}}{\underset{L^*=L}{=}} \langle w, L(v) \rangle$$

$$\overset{(SP2)}{=} \overline{\langle L(v), w \rangle} = \overline{b(v,w)}$$

$$v \in \mathrm{Kern}(L) \Rightarrow b(v,v) = 0$$

__3.108 Satz__: Sei V ein VR mit Skalarprodukt, E ONB von V, b Sesquilinearform auf V. Dann exist. eine eindeutig best. selbstadjungierte Matrix $M_b \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ sodass $\forall v, w \in V: b(v,w) = \langle M_b \cdot v_E, w_E \rangle_{\mathbb{K}^n}$

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist M_b symmetrisch.

__Beweis__: Sei $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ die ONB.

Setze $\alpha_{jk} := b(e_j, e_k)$, $M_b := (\alpha_{jk})$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{kj} = b(e_k, e_j) \overset{(**)}{=} \overline{b(e_j, e_k)} = \overline{\alpha_{jk}} \\ \Rightarrow M_b^* = M_b, \text{ also } M_b \text{ selbstadj.} \\ b(v,w) \overset{\text{Nachrechnen}}{=} \langle M v_E, w_E \rangle_{\mathbb{K}^n} \end{cases} \qquad \square$$

__3.109 Bem__: $b \mapsto M_b$ ist bijektive Abb. von der Menge aller Sesquilinearformen auf V auf die Menge aller selbstadj. $n\times n$-Matrizen.

(genauso wie $L \mapsto M_L$)

3.110 Satz: Zusätzlich zu 108 sei E' eine weitere ONB und $S := M_{id}^{E,E'}$ die Basiswechselmatrix. Insbesondere ist S unitär, d.h. $S^* = S^{-1}$. Dann

$$M_\ell^{E'} = S^* \cdot M_\ell^E \cdot S = S^{-1} \cdot M_\ell^E \cdot S$$

Beweis: $\ell(v,w) = \langle M_\ell^E \cdot v_E, w_E \rangle_{\mathbb{K}^n}$

$$= \langle M_\ell^E \underbrace{M_{id}^{E,E'}}_{=S} \cdot v_{E'}, \underbrace{M_{id}^{E,E'}}_{=S} w_{E'} \rangle_{\mathbb{K}^n}$$

$$= \langle \underbrace{S^* \cdot M_\ell^E \cdot S}_{= M_\ell^{E'}\text{, da die Matrix eindeutig ist}} \cdot v_{E'}, w_{E'} \rangle_{\mathbb{K}^n} \qquad \square$$

Beisp. $V = \mathbb{R}^2$, $\ell(x,y) := \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}_{=M_\ell^E} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}^2}$, $E = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

Früheres Bsp: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV zum EW $\lambda = 5$ von $L: x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot x$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist EV " " $\lambda = -5$

$\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}^2} = 0 \Rightarrow E' = \{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$ ist ONB

$$\Rightarrow S = M_{id}^{E,E'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_B^{E'} = S^* \cdot M_B^E \cdot S = S^{-1} M_B^E \cdot S$$

$$= M_{\mathrm{id}}^{E',E} \cdot \underbrace{M_B^E}_{= M_L^{E,E}} \cdot M_{\mathrm{id}}^{E,E'}$$

$$= M_L^{E',E'} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b(x,y) = 5x_1'y_1' - 5x_2'y_2'$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = x_{E'}, \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = y_{E'}$$

Insbesondere: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow x' = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow b(x',x') = -5 \cdot \sqrt{5}^2 = -25 < 0$$

3.111 **Def**: Sei b eine Sesquilinearform auf V.

1) Die Abb. $q: V \to \mathbb{R}: v \mapsto \underbrace{b(v,v)}_{\in \mathbb{R} \text{ nach } (**)}$ heißt zu b gehörende quadratische Form.

2) Eine quadratische Form heißt positiv semidefinit bzw. positiv definit, falls

$\forall v \in V: q(v) \geq 0$ bzw. $q(v) > 0$ falls $v \neq 0$

3) Eine selbstadj. $n \times n$-Matrix A $(A^* = A)$ heißt positiv semidefinit bzw. pos. definit, falls

$\forall x \in \mathbb{K}^n: \langle A \cdot x, x \rangle_{\mathbb{K}^n} \geq 0$ bzw. $\langle A \cdot x, x \rangle_{\mathbb{K}^n} > 0$ falls $x \neq 0$.

Beisp: $V = \mathbb{R}^2$, $\ell\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha_1 x_1 y_1 + \alpha_2 x_2 y_2$

$$= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^2}$$

$q(x) =$

$\Rightarrow \ell(x,x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \geq 0 \wedge \alpha_2 \geq 0 \Rightarrow \ell \text{ pos. semidefinit, genauso } A \\ \alpha_1 > 0 \wedge \alpha_2 > 0 \Rightarrow \ell \text{ pos. definit, genauso } A \\ \alpha_1 < 0 \vee \alpha_2 < 0 \Rightarrow \ell \text{ ist nicht pos. semidef., genauso } A \end{cases}$

Bem: Jede pos. definite Sesquilinearform definiert ein Skalarprodukt.

3.112 Satz: Sei $M \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Die zugehörige lin Abb. $L: x \mapsto M \cdot x$ besitze eine ONB aus EVen.

1) Äquivalent sind:
   (i) M ist pos. definit
   (ii) Für alle EWe λ von M gilt $\lambda > 0$.

2) Äq. sind: (i) M pos. semidefinit
   (ii) Für alle EWe λ gilt $\lambda \geq 0$.

Beweis: Sei B die ONB aus EVen, E die kanonische Basis, $S = M_{id}^{E,B}$

$$\Rightarrow q(x) := \langle M \overset{= x_E}{x}, x \rangle_{\mathbb{K}^n}$$

$$= \langle M \cdot \underbrace{M_{2d}^{E,B}}_{S} \cdot x_B, \underbrace{M_{2d}^{E,B}}_{=S} \cdot x_B \rangle_{\mathbb{K}^n}$$

$$= \langle S^* \cdot M \cdot S \cdot x_B, x_B \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

$= S^{-1}$ da E, B beide ONBen

$$= \langle \underbrace{M_{2d}^{B,E} \cdot M \cdot M_{2d}^{E,B}}_{= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}} \cdot x_B, \underbrace{x_B}_{= \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}} \rangle$$

λ_j EWe von L.

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x_j')^2 \qquad \square$$

3.15 Diagonalisierung mit ONBen

3.113 Satz: Sei V ein VR mit Skalarprodukt. Ist $L: V \to V$ normal, so gilt

v EV von L zum EW $\lambda \Rightarrow v$ ist EV von L^* zum EW $\bar{\lambda}$

Beweis: $\|L^*(v) - \bar{\lambda} \cdot v\|_2^2 =$

$$\overset{\text{Def } \|\cdot\|_2}{=} \langle L^*(v) - \bar{\lambda} \cdot v, L^*(v) - \bar{\lambda} \cdot v \rangle_V$$

$$= \cancel{\langle L^*(v), L^*(v) \rangle_V} - \lambda \langle L^*(v), v \rangle_V$$

$$- \bar{\lambda} \langle v, L^*(v) \rangle + \bar{\lambda} \cdot \cancel{\lambda \langle v, v \rangle}$$

Mit $\underline{\langle L^*(v), L^*(v)\rangle_V} =$

$\overset{\text{Def } L^*}{=} \langle \underbrace{L \circ L^*}_{= L^* \circ L \text{, da } L \text{ normal ist}}(v), v\rangle_V$

$= \langle \underbrace{L(v)}, \underbrace{L(v)}_{=\lambda \cdot v}\rangle_V$

$= \lambda v$, da v EV zum EW λ

$= \underline{\lambda \cdot \bar{\lambda} \langle v, v\rangle_V}$ (*)

$\underline{\lambda \cdot \langle L^*(v), v\rangle_V} = \lambda \cdot \langle v, \underbrace{L(v)}_{=\lambda \cdot v}\rangle_V$

$= \underline{\lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot \langle v, v\rangle_V}$

$\underline{\bar{\lambda} \cdot \langle v, L^*(v)\rangle} = \bar{\lambda} \langle \underbrace{L(v)}_{=\lambda \cdot v}, v\rangle_V = \underline{\lambda \bar{\lambda} \langle v, v\rangle_V}$

$\Rightarrow \| L^*(v) - \bar{\lambda} \cdot v \|_2^2 = \underline{\lambda \bar{\lambda} \cdot \langle v, v\rangle} - \underline{\lambda \bar{\lambda} \langle v, v\rangle}$

$- \underline{\lambda \bar{\lambda} \langle v, v\rangle} + \lambda \cdot \bar{\lambda} \langle v, v\rangle = 0 \quad \square$

3.174 Charakterisierung normaler Abbildungen

Sei V ein VR über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt.

Für $L: V \to V$ lin sind äquivalent:

(i) L besitzt eine ONB aus EVen

(ii) L ist normal

3.115 Folg: Ist $L: V \to V$ normal, dann

1) EVen zu verschiedenen EWen sind orthogonal

2) L ist diagonalisierbar.

Beisp: 1) $L: X \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{= M_L} \cdot X$

$L^*: X \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{= M_{L^*} = M_L^T \text{ da } \mathbb{K} = \mathbb{R}} \cdot X$

$L \circ L^*: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 11 \\ & * \end{pmatrix}$ ← verschieden

$L^* \circ L: \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 14 \\ & * \end{pmatrix}$ ←

$\Rightarrow L \circ L^* \neq L^* \circ L$

L ist nicht normal

ungl.