1.5 Natürliche Zahlen

1.29 Peano...

1.30 Vollständige Induktion

Sei $A(n)$ eine von $n \in \mathbb{N}$ abh. Aussage, z.B.

$$1+2+\dots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ziel Beweise $A(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Verfahren 1) (i) $A(1)$ ist wahr Induktionsanfang (IA)

Ind. Schritt (IS) (ii) Ist $A(n)$ wahr für ein bel. aber festes $n \in \mathbb{N}$, so auch $A(n+1)$: Induk. → Vorauss. / Annahme

$$\underline{A(n)} \Rightarrow \underbrace{A(n+1)}_{\text{Indukt. behauptung}} \quad (IV)$$

2) Induktionsschluss:

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis Sei $M := \{ n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ wahr} \}$.

Nach (IA) ist $1 \in M$. Nach (IS) ist $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$

Also ist nach $(\mathbb{N}3)$ $M = \mathbb{N}$. $\square$

1.3.1 Bsp: $A(n): 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ $(*)$

1\) (IA) $A(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ wahr.

Gelte $(*)$ für ein bel. aber festes $n \in \mathbb{N}$ (IV), dann folgt

(IS) $A(n+1): \overbrace{1+2+\ldots+n} + (n+1) \overset{(IV)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Also wurde die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

② Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\quad q^0 + q^1 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (Übung)

③ Sei $M_n \subseteq \mathbb{N}$ mit $\# M_n = n$, dann
$\exists\ k = \max(M)$.

Dabei ist $k \in M \wedge l \leq k \ \forall l \in M$.

④ $A(n)$: Die Potenzmenge einer Menge M mit $\# M = n$ besitzt genau 2^n Elemente.

(IA) Sei $M = \{a\}$, dann besitzt $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\{a\}, \emptyset\}$
$2^1 = 2$ Elemente.

Gelte die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV), dann gilt für M, $\# M = n+1$, d.h. $M = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$:

Seien

- $\mathcal{P}_1 := \{A \in \mathcal{P}(M) : a_{n+1} \in A\}$,
- $\mathcal{P}_2 := \{A \in \mathcal{P}(M) : a_{n+1} \notin A\}$.

Dann ist

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}_1 \mathbin{\dot\cup} \mathcal{P}_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(M) = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset \end{array} \right. .$$

Ferner gilt

$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}(\{a_1, \dots, a_n\}) = \mathcal{P}(M \setminus \{a_{n+1}\})$$

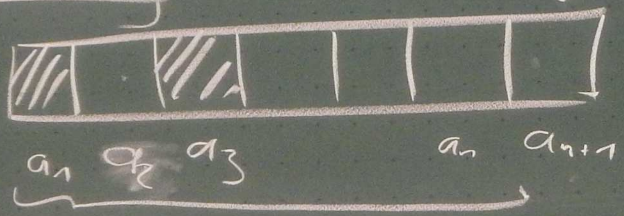
sowie $P_1 = \{ A \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathcal{P}(M \setminus \{a_{n+1}\}) : A = B \,\dot\cup\, \{a_{n+1}\} \}$.

Nach Voraussetzung gilt

$$\#\mathcal{P}(M) = \#(P_1 \cup P_2) \overset{P_1 \cap P_2 = \emptyset}{=} \#P_1 + \#P_2 \overset{(IV)}{=} 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Also gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Anmerkung:

A 

$\rightsquigarrow 2 \cdot 2^n$ Mögl.

2^n Mögl.

Anm $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

3) Produktzeichen $\prod$

▷ $\prod_{k=1}^{0} a_k := 1$

▷ $\prod_{k=1}^{n+1} a_k = (a_{n+1}) \cdot \prod_{k=1}^{n} a_k \quad n \geq 1$

4) Add. & Mult. aus den Peano-Axiomen: Sei $n, m \in \mathbb{N}$
und

▷ $m+1 := Nf(m)$

▷ $m+(n+1) := N(n+m) \quad , n \geq 1$

▷ $m \cdot 1 := m$

▷ $m(n+1) := mn+m$

1.33 Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ („n über k")

Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$. Wir def.

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k\cdot(k-1)\cdots 1},$$

dann gilt

1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für $k \leq n+1$ (Ü)

3) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ (Ü)

1.3.4 Binomischer Lehrsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

(*) $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Bew (IA) $(n=1)$ $$(a+b)^1 = a+b = \overbrace{\underbrace{\binom{1}{0}}_{1}\underbrace{a^{1-0}b^0}_{a}}^{k=0} + \overbrace{\underbrace{\binom{1}{1}}_{1}\underbrace{a^{1-1}b^1}_{b}}^{k=1}$$

Gelte (*) für ein n. Dann gilt zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \overset{!}{=} (a+b)^{n+1}$$

RS $$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \overset{(IV)}{=} (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} =$$

Index Shift

$$\overset{\text{Index Shift}}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k}} \qquad (l := k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k} + \binom{n}{0} a^{n+1} b^{0} + \binom{n}{n+1-1} a^{n-(n+1-1)} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^{0} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]}_{\binom{n+1}{k}} a^{n+1-k} b^{k} + \binom{n+1}{n+1} a^{0} b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^{k}.$$

Also gilt die Gleichung für alle $n \geq 1$.

4) $\binom{0}{0}$ — Pascalsche Dreieck

$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$ =

$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

1   $n=0$

1 1 $n=1$

1 2 1 $n=2$

1 3 3 1

1 4 6 4 1

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \underline{1} \cdot a^2 + \underline{2}\,ab + \underline{1} \cdot b^2$$

$$(a+b)^4 = \underline{1} \cdot a^4 + \underline{4}\,a^3b + \underline{6}\,a^2b^2 + \underline{4}\,ab^3 + 1 \cdot b^4$$

1.35 Von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$.

Seien $m, n, m', n' \in \mathbb{N}$

Idee $-1 = 1-2 = 2-3 = 3-4 = m-(m+1) = \dots$

Def ÄR $\sim$ auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ durch $(m,n) \sim (m',n') :\Leftrightarrow m+n' = m'+n$,

dann ist $\mathbb{Z} := \{ [(m,n)]_\sim : m,n \in \mathbb{N} \}$

und setze

- $0 := [(1,1)]_\sim$
- $n := [(n+1,1)]_\sim$
- $-n := [(1,n+1)]_\sim$

Dann erfüllt $(\mathbb{Z}, +)$ die üblichen Rechenregeln.

1.6 Teilbarkeit

1.36 Def Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann heißt $\underset{\mathbb{N}_0}{\overset{}{m}}$ **Teiler** von n

falls
$$\exists k \in \mathbb{Z} : n = k \cdot m.$$

Schreibe $m \mid n$. n heißt **teilbar** durch m. Insb. ist 0 teilbar durch alle $m \in \mathbb{N}$.

- Die Menge der Teiler von n sei $D(n) := \{d \in \mathbb{N} : d \mid n\}$.
- Für $m, n \in \mathbb{N}$ heißt $ggT(n,m) := \max\left(D(m) \cap D(n)\right)$

on n

b. ist 0

N. d|n}

Bsp $m = 30,\ n = 24$

$$\rightsquigarrow D(m) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$D(n) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$\rightsquigarrow D(n) \cap D(m) = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$\rightsquigarrow \max\big(D(n) \cap D(m)\big) = 6 \quad //$$