(B1) $|x| \geq 0 \wedge (|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

(B2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(B3) $|x+y| \leq |x| + |y|$

$|\;| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_0^+$

217 Satz: In jedem bew. Körper gelten

1) $|1| = |-1| = 1$

2) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ für $y \neq 0$

3) $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big| \geq |x|-|y|$

$|x+y| \geq \big||x|-|y|\big|$

Beweis: 2) $x = \frac{x}{y}\cdot y \overset{(B2)}{\Rightarrow} |x| = \left|\frac{x}{y}\right| \cdot |y| \;\Big|\cdot \frac{1}{|y|} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$

1) $|1_{\mathbb{K}}| = \left|\frac{1_{\mathbb{K}}}{1_{\mathbb{K}}}\right| \overset{2)}{=} \underbrace{\frac{|1_{\mathbb{K}}|}{|1_{\mathbb{K}}|}}_{\in \mathbb{R}} = 1_{\mathbb{R}}$

$1 = |1| = |(-1)^2| \overset{(B2)}{=} |-1|^2$, $|-1| \in \mathbb{R}_0^+$

Für $\ell := |-1| \in \mathbb{R}_0^+$ gilt $1 = \ell^2 \Leftrightarrow 0 = \ell^2 - 1 = (\ell-1)(\ell+1)$

Satz vom Nullprodukt $\Rightarrow \ell = 1 \vee \ell = -1$, wobei $\ell \in \mathbb{R}_0^+$

$\Rightarrow |-1| = \ell = 1$

3) Gruppenübung $\square$

2.18 Def: In einem bewerteten Körper ist der **Abstand** zweier Elemente $x, y \in \mathbb{K}$ definiert durch $d(x,y) := |x-y|$. d ist eine **Metrik** auf $\mathbb{K}$ (vgl. 2. Sem).

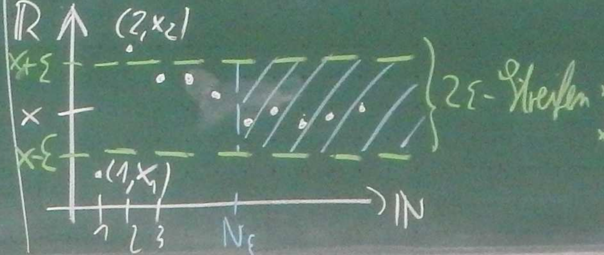
2.19 Def: Sei M eine Menge. Eine **Folge** in M ist eine Abb. $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in M$. Schreibweise: (x_n) oder $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

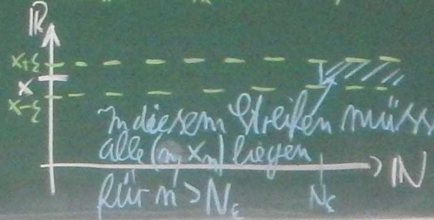
z.B. $x_n = \frac{1}{n}$, $(x_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

$x_n = (-1)^n$, $(x_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$

2.20 Konvergenz: Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, |.|)$ ein bewerteter Körper. Die Folge (x_n) in $\mathbb{K}$ heißt **konvergent** gegen $x \in \mathbb{K}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon : \underbrace{|x_n - x| < \varepsilon}_{\text{in } \mathbb{R}:\; x_n \in \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[}$$





"Ist das ε auch noch so klein, ab N_ε gehn alle rein"

In diesem Fall schreibt man

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \,,\quad x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \,,\quad x_n \to x \text{ für } n\to\infty,\quad x_n \to x$$

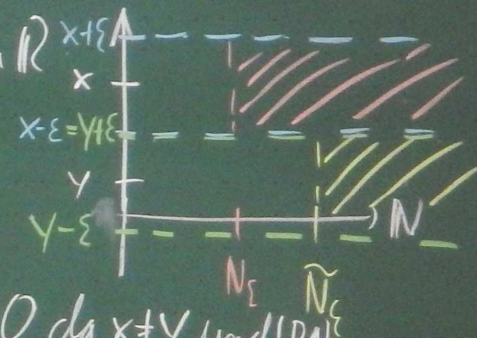
x heißt <u>Grenzwert</u> oder <u>Limes</u> der Folge. Eine Folge (x_n) heißt <u>konvergent</u>, falls $\exists x \in \mathbb{K}: x_n \to x$.

Andernfalls heißt sie <u>divergent</u>: $\forall x \in \mathbb{K}: \neg(x_n \to x)$

2.21 <u>Eindeutigkeit des Grenzwerts</u>: Sei $(\mathbb{K}, |.|)$ bewerteter Körper. Gilt $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, so besitzt (x_n) keinen weiteren Grenzwert.

<u>Widerspruchsbeweis</u>: Ann.: $x = \lim_{n\to\infty} x_n \wedge y = \lim_{n\to\infty} \wedge x \neq y$

Veranschaulichung in $\mathbb{R}$



Wähle $\varepsilon := \frac{|x-y|}{2} > 0$ da $x \neq y$ und (B1)

$x_n \to x \Rightarrow \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon$

$x_n \to y \Rightarrow \exists \tilde{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > \tilde{N}_\varepsilon : |x_n - y| < \varepsilon$

Sei $n_0 > \max\{N_\varepsilon, \tilde{N}_\varepsilon\}$ gewählt

$\Rightarrow |x-y| = |x - x_{n_0} + x_{n_0} - y| \leq |x_{n_0} - x| + |x_{n_0} - y| < 2\varepsilon = |x-y|$

Transitiv. $\Rightarrow$ $|x-y| < |x-y|$ ↯ (O1) $\square$

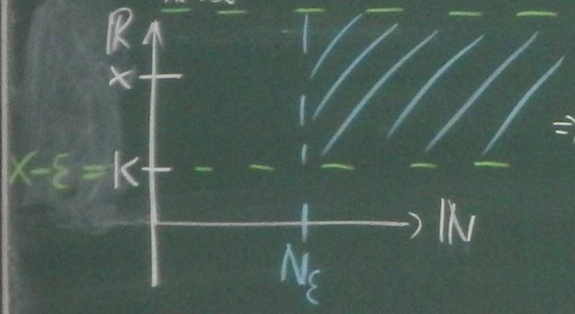
2.22 Satz: Sei (x_n) konv. Folge in $\mathbb{R}$ und $K\in\mathbb{R}, N\in\mathbb{N}$

Dann: 1) $\forall n>N: x_n \le K \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \le K$

2) $\forall n>N: x_n \ge K \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge K$

Kontrapositionsbeweis: Zeige

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n > K \Rightarrow \exists n>N: x_n > K$$



Setze $\varepsilon := x-K>0$

$\Rightarrow \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \forall n>N_\varepsilon: |x_n-x|<\varepsilon$

$\Rightarrow$ Für $n>N_\varepsilon$ gilt

$$x_n = \underbrace{(x_n-x)}_{y}+x \ge -|x_n-x|+x$$

$$|y| \ge -y \Leftrightarrow -|y| \le y$$

$$> -\varepsilon + x = -(x-K)+x = K$$

Trans. $\Rightarrow x_n > K$ für $n>N_\varepsilon$

$\Rightarrow \exists n>N: x_n>K.$ □

2.23 Achtung: $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}: x_n>0 \\ \text{aber } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ (Beweis nachher)} \end{cases}$

2.32 Die archimedische Anordnung

2.24 Axiom (A) $(\mathbb{R},<)$ ist ein archimedisch angeordneter Körper, d.h $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists n\in\mathbb{N}: n>x$

2.25 Folgerungen: Aus (A) folgen

1) $\forall y\in\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R}^+\ \exists n\in\mathbb{N}: nx>y$

$\left(nx>y \Leftrightarrow n>\frac{y}{x}\right)$

2) $\forall x\in\mathbb{R}_0^+\ \exists!\, n\in\mathbb{N}_0: n\leq x<n+1 \quad (x\in[n,n+1[)$

(Sei $x\in\mathbb{R}_0^+$. (A) $\Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}: n_0>x$

$\Rightarrow \#\{n\in\mathbb{N}: n\leq x\}\leq n_0$

Endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt größtes Element

$\Rightarrow n_0:=\lfloor x\rfloor := \max\{n\in\mathbb{N}: n\leq x\}$ ist wohldefiniert

$\Rightarrow \begin{cases} n_0\in\mathbb{N} \\ n_0\leq x \\ n_0+1>x \end{cases}$ Untere Gaußklammer

Eindeutigkeit: $n>n_0 \Rightarrow n\geq n_0+1>x$

$n<n_0 \Rightarrow n\leq n_0-1<x$

3) $\forall \varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}: \frac{1}{n}<\varepsilon$

$\left(\frac{1}{n}<\varepsilon \;\middle|\; \cdot\frac{n}{\varepsilon}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon}<n\right)$

4) $x\in\mathbb{R}_0^+ \wedge \left(\forall n\in\mathbb{N}: x\leq\frac{1}{n}\right) \Rightarrow x=0$

(Ann: $x>0 \overset{3)}{\Rightarrow} \exists n\in\mathbb{N}: \frac{1}{n}<x$ ↯)

5) $\forall \ell > 1 \; \forall x > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : \ell^n > x$

(Setze $d := \ell - 1 > 0$

$\Rightarrow \ell^n = (d+1)^n \underset{\text{Ungl}}{\overset{\text{Bernoulli-}}{\geq}} 1 + nd$

$> 1 + x$ für ein n nach 1)

$> x$)

6) $\forall \ell \in \,]0,1[\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : \ell^n < \varepsilon$

$(\ell^n < \varepsilon \;\Big|\; \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \ell^n} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{\ell^n} = \left(\frac{1}{\ell}\right)^n$

und $\frac{1}{\ell} > 1$, wende 5) an)

2.26 <u>Anwendung auf Folgen</u>: 1) $\frac{1}{n} \to 0$

Z.z: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon : \underbrace{\left|\frac{1}{n} - 0\right|}_{= \frac{1}{n}, \text{ da } \frac{1}{n} > 0} < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. 3) $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Für $n > n_0$ folgt $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Setze also $N_\varepsilon := n_0$.

2) $|q| < 1 \Rightarrow q^n \to 0$ (<u>geometrische Folge</u>)

Z.z: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon : \underbrace{|q^n - 0|}_{= |q|^n} < \varepsilon$, $0 \leq |q| < 1$

Fall $q = 0$: $|q|^n = 0 < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wähle $N_\varepsilon := 1$

Fall $q \neq 0$: $0 < |q| < 1 \overset{6)}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N} : |q|^{n_0} < \varepsilon$. Setze $N_\varepsilon := n_0$

$\Rightarrow \forall n > N_\varepsilon = n_0 : |q|^n = |q|^{n_0 + n - n_0} = |q|^{n_0} \cdot \underbrace{|q|^{\overbrace{n-n_0}^{>0}}}_{<1 \text{ da } |q|<1}$

$(\text{dann } |q|^2 < 1, \ldots)$

$< 1 \cdot |q|^{n_0} < \varepsilon$

3) $|q| < 1$ und $s_n = \sum_{j=0}^{n} q^j = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \underset{\text{als Üb.}}{\overset{\text{vollst. Ind.}}{=}} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Behauptung: $s_n \to \frac{1}{1-q}$

z.z.: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : \underbrace{\left| s_n - \frac{1}{1-q} \right|} < \varepsilon$

$= \left| \frac{1-q^{n+1}-1}{1-q} \right| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}$

$\frac{|q|^{n+1}}{|1-q|} < \varepsilon \iff |q|^{n+1} < \varepsilon \cdot |1-q| =: \tilde{\varepsilon}$

Verwende 2) $\Rightarrow$ Beh.

2.33 Vollständigkeit

2.27 Verdichtungsprinzip: (x_n) konvergent

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N_\varepsilon : |x_n - x_m| < \varepsilon$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

$x_n \to x \Rightarrow \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

Für $n, m > N_\varepsilon$: $|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m|$

$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \square$