Beweis: (B1) Fall $x>0 \Rightarrow |x| = x > 0$

Fall $x=0 \Rightarrow |x| = \cancel{x} = 0$

Fall $x<0 \Rightarrow |x| = -x \overset{(U3)}{>} 0$

Dies beweist $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(B2) Vier Fälle unterscheiden, nachrechnen

(B3) Fall $x+y \geq 0$:

$$|x+y| \overset{\text{Def } |\,|}{=} x+y \underset{\substack{y \leq |y| \\ (U2)}}{\overset{x \leq |x|}{\leq}} |x|+|y|$$

Fall $x+y<0$

$$|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \underset{\substack{-y \leq |y| \\ (U2)}}{\overset{-x \leq |x|}{\leq}} |x|+|y| \qquad \square$$

2.16 Def: Ein Körper $(\mathbb{K},+,\cdot)$ mit einem Betrag, d.h. einer Fkt. $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_0^+$, die (B1), (B2), (B3) erfüllt, heißt bewerteter Körper.

2.17 Satz: In jedem bewerteten Körper gelten:

1) $|1| = |-1| = 1$

2) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ falls $y \neq 0$

3) $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big| \quad (\geq |x|-|y|)$

(umgedrehte Δ-Ungl.)

$|x+y| \geq \big||x|-|y|\big|$

2.3 Die reellen Zahlen

2.7 Def: Die reellen Zahlen $(\mathbb{R},+,\cdot)$ bilden einen Körper mit folg. Eigenschaften:

(0) $(\mathbb{R},<)$ ist ein angeordneter Körper

(A) $(\mathbb{R},<)$ ist ein archimedischer Körper

(V) $(\mathbb{R},|\cdot|)$ ist vollständig

2.3.1 Die Anordnung in $\mathbb{R}$ und Folgerungen

2.8 Axiom (0): $(\mathbb{R},<)$ ist ein angeordneter Körper, d.h. auf $\mathbb{R}$ ist eine Relation $<$ (kleiner) definiert, so dass

(01) $\forall a,b\in\mathbb{R}$: Genau eine der Beziehungen $a<b$, $a=b$, $b<a$ ist wahr.

(02) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}: a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$ (Transitivität)

(03) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}: a<b \Rightarrow a+c<b+c$ (Verträglich mit Add.)

KAMERA AN

(O4) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}: a<b \wedge 0<c \Rightarrow a\cdot c < b\cdot c$
(Verträglich mit Mult.)

2.9 Bem: 1) Für $a<b$ schreibe auch $b>a$ (größer).

2) $a \in \mathbb{R}$ heißt <u>positiv</u>, falls $0<a$.
Setze $\mathbb{R}^+ := \{a \in \mathbb{R} : 0<a\}$, $\mathbb{R}^+_0 := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

3) Definiere $a \le b :\Leftrightarrow a<b \vee a=b$
$a \ge b :\Leftrightarrow b<a \vee a=b$
$\le, \ge$ sind Ordnungsrelationen auf $\mathbb{R}$.

4) Ein Ausdruck der Form $a<b$, $a\le b$, $a>b$, $a \ge b$ heißt <u>Ungleichung</u>.

5) $\mathbb{R}$ ist kein endlicher Körper, denn endl. Körper können nicht angeordnet werden (siehe unten).

2.10 Folgerungen: (U1) $a<b \Leftrightarrow 0<b-a \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} b-a>0$

$a<b \overset{(O3)}{\Rightarrow} a+(-a) < b+(-a) \Leftrightarrow 0<b-a \quad |+a$

$\overset{(O3)}{\Rightarrow} \underbrace{0+a}_{=a} < \underbrace{(b-a)+a}_{=b+((-a)+a)=b+0=b} \Leftrightarrow a<b$

(U2) $a<b \wedge x<y \Rightarrow a+x<b+y$
Insbes: $a<0 \wedge x<0 \Rightarrow a+x<0$
$0<b \wedge 0<y \Rightarrow 0<b+y$

$$a<b \overset{(O2)}{\Rightarrow} a+x < b+x \overset{KG}{=} x+b$$

$$x<y \overset{(O2)}{\Rightarrow} x+b < y+b$$

Trans. $\Rightarrow a+x<b+y$ (O2)

(U3) $a>0 \Leftrightarrow -a<0$ und $\underbrace{a<0 \Leftrightarrow -a>0}$

Beweis genauso

$$a>0 \overset{Def >}{\Leftrightarrow} 0<a \quad |+(-a)$$

$$\overset{(O3)}{\Rightarrow} \underbrace{0+(-a)}_{-a} < \underbrace{a+(-a)}_{0} \quad |+a$$

$$\overset{(O3)}{\Rightarrow} \underbrace{a+(-a)}_{=0} < \underbrace{0+a}_{=+a}$$

(U4) $0<a<b \wedge 0<x<y \Rightarrow ax<by$

$$a<b \wedge 0<x \overset{(O4)}{\Rightarrow} ax<bx=xb$$

$$x<y \wedge 0<b \overset{(O4)}{\Rightarrow} xb<yb$$

Trans. $\Rightarrow ax<by$ KG

(U5) $a<0 \wedge x<y \Rightarrow ax>ay$

(Mult. von Ungl. mit negativen Zahlen dreht das Ungleichheitszeichen um)

Entsprechend: $a<0 \wedge x>y \Rightarrow ax<ay$

$$a<0 \wedge x<y \overset{(U3)}{\Leftrightarrow} -a>0 \wedge x<y$$

$$\overset{(O4)}{\Rightarrow} (-a)\cdot x < (-a)\cdot y$$

$$\overset{2.6}{\Leftrightarrow} -(a\cdot x) < -(a\cdot y) \quad |+(a\cdot x+a\cdot y)$$

$$\overset{(O3)}{\Rightarrow} \underbrace{-(a\cdot x)+(a\cdot x+a\cdot y)}_{\overset{AG}{=}0+ay} < \underbrace{-(a\cdot y)+(a\cdot x+a\cdot y)}_{\overset{KG,AG}{=}0+ax}$$

$$\Leftrightarrow ay<ax$$

$$\overset{Def >}{\Leftrightarrow} ax>ay$$

(U6) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

Insbesondere: $1 = 1^2 > 0$

In endl. Körpern gibt es keine Anordnung: $1 > 0$

$\Rightarrow 1+1 > 1+0 = 1 > 0$

$\vdots$

$\Rightarrow \underbrace{1+\dots+1}_{=0} > 0$

$\Rightarrow 0 > 0$ ↯

z.B. $\mathbb{K} = \{0, 1, \dots, n\}$

$1+1 = 2$

$1+1+1 = 2+1 = 3$

$\vdots$

$\underbrace{1+\dots+1} = n$

$+1 \in \{0, \dots, n\}$

Fall $a > 0 \Leftrightarrow 0 < a \overset{(O4)}{\Rightarrow} \underbrace{0 \cdot a}_{=0} < a \cdot a \Leftrightarrow 0 < a^2$

2.8

$\underset{\text{Def} >}{\Leftrightarrow} a^2 > 0$

Fall $a < 0 \overset{(U5)}{\Rightarrow} \underbrace{a \cdot a}_{=a^2} > \underbrace{a \cdot 0}_{=0} \Leftrightarrow a^2 > 0$

Dies sind alle Fälle nach (O1), da $a \neq 0$ vorausgesetzt

(U7) $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0 \wedge a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$

$a \neq 0 \overset{(U6)}{\Rightarrow} \frac{1}{a^2} > 0 \mid \cdot a \overset{(O4)}{\Rightarrow} \frac{1}{a^2} \cdot a > 0 \cdot a \underset{a \cdot \frac{1}{a} = 1}{\overset{A6}{\Leftrightarrow}} \frac{1}{a} > 0$.

(U8) $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$0 < a \wedge 0 < b \overset{(O4)}{\Rightarrow} 0 < a \cdot b \overset{(U7)}{\Rightarrow} \frac{1}{a \cdot b} > 0$

$a < b \mid \cdot \frac{1}{ab} \overset{(O4)}{\Rightarrow} a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

KAMERA AN

AUFNAHME

(U9) $0 < a < b \Rightarrow \frac{b}{a} > 1$

$$1 = a \cdot \frac{1}{a} \overset{(O4)}{<} b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$$

2.11 Bernoulli-Ungl.: Für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Beweis: Vollst. Ind., als Übung.

2.12 Intervalle: Für $a<b$ sei

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$[a,b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$[a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

Entsprechend: $]a,b]$, $]a,\infty[$, $]-\infty,a[$, $]-\infty,a]$, $]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$.

2.13 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$: 1) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ def. durch

$$f(1_{\mathbb{N}}) := 1_{\mathbb{R}}, \quad f(\mathrm{Nf}(n)) := f(n) + 1_{\mathbb{R}}$$

Nach dem Induktionsaxiom ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert.

$$f(n) = \underbrace{1_{\mathbb{R}} + 1_{\mathbb{R}} + \dots + 1_{\mathbb{R}}}_{n\text{-Mal}}$$

Setze $\tilde{\mathbb{N}} := f(\mathbb{N})$

f ist injektiv: Sei $n \neq m$, o.B.d.A. $n > m$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = m + k$

(O3), (U6): $f(m) < f(m) + 1_{\mathbb{R}} = f(m + 1_{\mathbb{N}}) < \dots < f(m+k) = f(n)$

$\Rightarrow f(m) < f(n)$, insbes. $f(n) \neq f(m)$

$\Rightarrow f: \mathbb{N} \to \tilde{\mathbb{N}}$ ist bijektiv

Damit gelten die Peano-Axiome automatisch auch für $\tilde{\mathbb{N}}$ mit $N f(f(n)) = f(n) + 1_{\mathbb{R}}$.

Identifiziere $\tilde{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{N}$, schreibe $\mathbb{N}$ statt $\tilde{\mathbb{N}}$.

2) $\mathbb{Z} := \{ h \in \mathbb{R} \mid \exists n, m \in \mathbb{N} : h = n - m \} \subseteq \mathbb{R}$

3) $\mathbb{Q} := \{ h \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{N} : h = \frac{p}{q} \} \subseteq \mathbb{R}$

Übertrage Arithmetik und Anordnung auf diese Teilmengen soweit möglich.

Frage: $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$? später

2.14 Def: Der **Betrag** von $x \in \mathbb{R}$ ist def. durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Insbesondere: $|x| \geq x$, $|x| = |-x| \geq -x$

Beweis durch Fallunterscheidung

2.15 Eigenschaften Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

(B1) $|x| \geq 0 \wedge (|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$,

(B2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(B3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Δ-Ungl.)