2.34 Definition:

1) Eine Folge (a_n) heißt **monoton wachsend (monoton fallend)**, falls $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} \leq a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

2) Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$, so dass
   - (a_n) monoton wachsend,
   - (b_n) monoton fallend,
   - $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$,
   - $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

   Dann heißt die Folge von Intervallen $\big([a_n, b_n]\big)$ **Intervallschachtelung**.

2.35 Satz: Ist $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung, so konvergieren die Folgen $(a_n), (b_n)$ gegen denselben Grenzwert und

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x\} \text{ mit } x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

4) Zeige: $y < a \Rightarrow y \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to a \\ \varepsilon := a-y > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < a-y$$

Für $n > N_\varepsilon$ folgt

$$\begin{aligned} a_n &= a_n - a + a = a - (a - a_n) \\ &\geq a - |a - a_n| \\ &> a - (a-y) \\ &= y \end{aligned}$$

$\Rightarrow y < a_n$

$\Rightarrow y \notin [a_n, b_n]$

$\Rightarrow y \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$

Genauso: $y > a \Rightarrow y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ (verwende (b_n) anstelle von (a_n)) $\square$

2.36 Def: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$.

1) $a \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke (untere Schr.) von M, falls

$$\forall x \in M: \ x \leq a \quad (x \geq a).$$

2) M heißt nach oben beschränkt, falls eine (und damit unendlich viele) obere Schranke exist. Genauso: Nach unten beschränkt

M heißt beschränkt, falls M nach oben und nach unten beschränkt ist.

$$\bigcap_{n=1} [a_n, b_n] = \{x\} \text{ mit } x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

...vende (b_n)
...telle von (a_n)) □

...) von M, falls

...e (und damit
...nauso: Nach

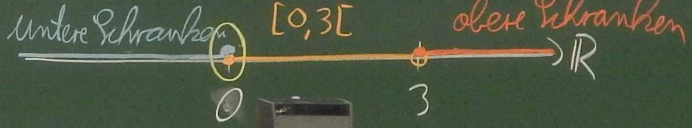
...nach unten

3) $a \in \mathbb{R}$ heißt maximales (minimales) Element, falls $a \in M \wedge \forall x \in M: x \le a \quad (x \ge a)$
a heißt auch Maximum (Minimum) von M.
Schreibe $a =: \max M$ ($a =: \min M$).

4) $a \in \mathbb{R}$ heißt Supremum (Infimum) von M, falls a die kleinste obere Schranke von M ist (a die größte untere Schr. von M ist).
$a =: \sup M$ ($a =: \inf M$)

5) Falls M nicht nach oben beschränkt: $\sup M := \infty$
" M " " unten " : $\inf M := -\infty$

Menge	obere Schr.	untere Schr.	max M	min M	sup M	inf M
$\{1,2,3\} \subseteq \mathbb{R}$	alle $a \ge 3$	alle $a \le 1$	3	1	3	1
$]-\infty, 1]$	alle $a \ge 1$	/	1	/	1	$-\infty$
$]2, \infty[$	/	alle $a \le 2$	/	/	∞	2
$[0, 3[$	alle $a \ge 3$	alle $a \le 0$	/	0	3	0
$\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$	alle $a \ge 1$	alle $a \le 0$	1	/	1	0



2.37 Satz: Jede nach unten (oben) beschränkte Menge $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum (Supremum).

Beweis: Intervallschachtelung für Inf:

Wähle untere Schranke a_0 und $b_0 \in M$

Setze $x_1 := \frac{a_0 + b_0}{2}$

Entweder ist x_1 untere Schr.: $\forall y \in M : x_1 \leq y$: Setze $a_1 := x_1,\ b_1 := b_0 \in M$

Oder x_1 ist keine " " : $\exists y \in M : y < x_1$: Setze $a_1 := a_0,\ b_1 := y \in M$

Setze $x_2 := \frac{a_1 + b_1}{2}$

Entweder $\forall y \in M : x_2 \leq y$. Setze $a_2 := x_2,\ b_2 := b_1 \in M$

Oder $\exists y \in M : y < x_2$: Setze $a_2 := a_1,\ b_2 := y \in M$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{4}(b_{n-2} - a_{n-2}) = \dots = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \\ \quad \Rightarrow b_n - a_n \to 0 \\ (a_n) \text{ mon. wachsend, } (b_n) \text{ mon. fallend,} \\ \left. \begin{array}{l} a_n \text{ ist untere Schranke} \\ b_n \in M \end{array} \right\} \Rightarrow a_n \leq b_n \end{array} \right.$$

$\Rightarrow ([a_n, b_n])$ ist Intervallschachtelung

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n =: a$

Beh: $a = \inf M$.

2) a ist größte untere Schr.

Sei $c>a$. Zeige c ist keine unt. Schranke

$$\left.\begin{array}{l} b_n \to a \\ \varepsilon = c-a>0 \end{array}\right\} \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n>N_\varepsilon : |b_n - a| < c-a$$

Für $n>N_\varepsilon$: $b_n = b_n - a + a \le |b_n - a| + a$

$$< c-a+a = c$$

$\Rightarrow b_n \in M \wedge b_n < c$

$\Rightarrow c$ ist keine untere Schr.

2.38 Hauptsatz über mon. Folgen: 1) (a_n) mon. wachsend und nach oben beschränkt $(\exists K \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \le K)$ $\Rightarrow (a_n)$ konv.

2) (a_n) mon. fallend und nach unten beschr. $\Rightarrow (a_n)$ konv.

Beweis: 1) $a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ exist.

Beh: $a_n \to a$: $\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n>N_\varepsilon : \underbrace{|a_n - a|}_{= a-a_n} < \varepsilon$

Sei $\varepsilon>0$ fest. $a-\varepsilon < a \Rightarrow a-\varepsilon$ ist keine obere Schr.

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > a-\varepsilon$

(a_n) mon wachsend $\Rightarrow \forall n \ge n_0 : \overbrace{a_n \ge a_{n_0} > a-\varepsilon}^{\Leftrightarrow\ \varepsilon > a-a_n} \quad | +\varepsilon - a_n$ $\square$

2.39 Existenz der Wurzel: Seien $a \in \mathbb{R}^+$ und $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Definiere für $n \in \mathbb{N}$ x_n durch

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

Dann konvergiert (x_n), und für $l := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ gelten: $l^2 = a \wedge l \geq 0$. Schreibe $l =: \sqrt{a}$.

(Babylonisches Wurzelziehen, Heron-Verfahren)

Beweis: Zeige (x_n) mon. fallend und nach unten beschr.

1) $\forall n \in \mathbb{N}_0: x_n > 0$: Ind. anfang: $x_0 > 0$ nach Vorauss.

Ind. Schritt: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \underset{a \geq 0}{\overset{x_n > 0}{>}} 0$

Ind. Schluss: $\forall n \in \mathbb{N}_0$ $x_n > 0$

2) Zeige $\forall n \in \mathbb{N}: x_n^2 \geq a$

$$\begin{aligned} x_n^2 - a &= \frac{1}{4}\left(\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - 4a\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 \cancel{+}- 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2} - \cancel{4a}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

3) (x_n) ist mon. fallend:

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2x_n}}_{>0 \text{ nach 1)}} \underbrace{\left(x_n^2 - a\right)}_{\geq 0 \text{ nach 2)}} \geq 0 \quad \Rightarrow x_n \geq x_{n+1}. \end{aligned}$$

Hauptsatz über mon. Folgen $\Rightarrow (x_n)$ konv.

$$x_n > 0 \overset{2.22}{\Rightarrow} b := \lim_{n\to\infty} x_n \geq 0$$

4) Es gilt $b > 0$:

$$a \leq \lim_{n\to\infty} x_n^2 \overset{\text{später}}{=} \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 = b^2$$

$$a > 0 \Rightarrow b^2 \neq 0 \Rightarrow b \neq 0 \overset{b \geq 0}{\Rightarrow} b > 0$$

5) Zeige $b^2 = a$:

$$b = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

$$\overset{\text{später}}{=} \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n\to\infty} x_n}\right)$$

$$\overset{\lim x_n \neq 0}{=} \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right) \quad |\cdot 2 \quad | - b$$

$$\Leftrightarrow 2b - b = \frac{a}{b} \quad |\cdot b$$

$$\Leftrightarrow b^2 = a. \quad \square$$

2.40 Bem. 1) Sei $d_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n}$ der relative Fehler.

$$\overset{\text{selber rechnen}}{\Rightarrow} \quad d_{n+1} \leq d_n^2$$

$\Rightarrow$ Die Zahl der korrekten Nachkommastellen verdoppelt sich in jedem Schritt.

2) Wir wissen $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

3) Analog: Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ fest. Sei

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) \quad \text{mit } x_0 > 0$$

$\Rightarrow (x_n)$ konv., $b := \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow b \geq 0 \wedge b^k = a$. Schreibe $b =: \sqrt[k]{a}$!

2.41 Satz: Sei $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Dann ist (a_n) mon wachsend und beschränkt.

$e := \lim_{n\to\infty} a_n$ heißt eulersche Zahl.

$= 2{,}71\ldots$

Beweis: Monotonie: Zeige $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n}_{} \cdot \underbrace{\frac{n}{n-1}}_{>0}$$

Bernoulli

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1\underbrace{-\frac{1}{n^2}}_{\geq -1}\right)^n \geq 1 - n\cdot\frac{1}{n^2} = 1-\frac{1}{n}$$

$$\geq \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n-1} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n-1} = 1.$$

Beschränktheit: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$\vdots$

≤ 3

$\Rightarrow e \leq 3$