$x_n \to x \;:\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon$

Verdichtungsprinzip

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n, m > N_\varepsilon : |x_n - x_m| < \varepsilon$

2.28 Def: Eine Folge (x_n) in einem bewerteten Körper heißt Cauchy-Folge, falls sie das Verdichtungsprinzip erfüllt.

Also: (x_n) konv. $\Rightarrow (x_n)$ Cauchy-Folge

bzw. (x_n) keine Cauchy-Folge $\Rightarrow (x_n)$ divergent

z.B. $x_n = (-1)^n$: (x_n) ist keine Cauchy-Folge:

Zeige: $\exists \varepsilon > 0 \; \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \exists n, m > N_\varepsilon : |x_n - x_m| \geq \varepsilon$

Wähle $\varepsilon := 1$. Sei $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ bel.

Wähle $n := N_\varepsilon + 1$, $m := N_\varepsilon + 2$

$\Rightarrow |x_n - x_m| = 2 > \varepsilon$.

$\Rightarrow (x_n)$ ist divergent.

2.29 Dezimalbrüche: Sei $a_0 \in \mathbb{N}$ und lge

rgent

lge:

$x_m| \geq \varepsilon$

$d_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für $j \in \mathbb{N}$. Setze

$$a_n := a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \dots + \frac{d_n}{10^n}$$

$$= a_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j \left(\frac{1}{10}\right)^{j}$$

Schreibe zur Abkürzung $a_n = a_0{,}d_1 d_2 \dots d_n$

Beh: (a_n) ist Cauchy-Folge

Beweis: Sei o.B.d.A $m > n$, $m = n + k$

$$\Rightarrow a_m - a_n = a_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j \left(\frac{1}{10}\right)^{j} + \sum_{j=n+1}^{m} d_j \left(\frac{1}{10}\right)^{j} - \left(a_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j \left(\frac{1}{10}\right)^{j}\right)$$

$$\Rightarrow 0 \leq a_m - a_n = \sum_{j=n+1}^{m} d_j \left(\frac{1}{10}\right)^{j}$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{m} 9 \left(\frac{1}{10}\right)^{j}$$

$$= 9 \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \underbrace{\sum_{j=n+1}^{m} \left(\frac{1}{10}\right)^{j-n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{10}\right)^{m-n-1}$$

$$\overset{\text{geometrische Summe } 1+q+q^2+\dots+q^k}{=} \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{10}} \Big\} \frac{9}{10}$$

$$= \cancel{9} \underbrace{\left(\frac{1}{10}\right)^{n+\cancel{1}}}_{>0} \frac{\cancel{10}^{1}}{\cancel{9}} \underbrace{\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{\dots}\right)}_{<1}$$

$< \left(\frac{1}{10}\right)^n \cdot 1 \quad < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$,

da $\left(\frac{1}{10}\right)^n \to 0$ (siehe 2.26, 2)

$\Rightarrow |a_m - a_n| = a_m - a_n < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$

$m > n$

2.30 Axiom (V): $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist <u>vollständig</u>,

d.h. in $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchy-Folge.

Also gilt in $\mathbb{R}$: (x_n) konv. $\Leftrightarrow$ (x_n) Cauchy-Folge

2.31 Satz: 1) Jeder Dezimalbruch konv. gegen eine reelle Zahl.

2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ exist. ein Dezimalbruch, der gegen x konv.

Meist identifiziert man x mit dem Dezimalbruch und schreibt z.B.

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$$

<u>Beweis</u>: 1) Folgt aus (V) und 2.29.

2) Konstruktiv: Sei $x \in \mathbb{R}_0^+$

$a_0 := \lfloor x \rfloor \Rightarrow 0 \le x - a_0 < 1$

$\Rightarrow 0 \le 10(x - a_0) < 10$

$d_1 := \lfloor 10(x - a_0) \rfloor \Rightarrow 0 \le 10(x - a_0) - d_1 < 1$

Außerdem $d_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$

Für $a_1 := a_0 + \frac{d_1}{10}$ gilt

$$0 \le 10(x - \underbrace{a_0 - \frac{d_1}{10}}_{= a_1}) < 1$$

$$\Rightarrow 0 \le 100(x - a_1) < 10$$

$$d_2 := \lfloor 100(x - a_1) \rfloor$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_2 \in \{0, 1, \dots, 9\} \wedge 0 \le 100(x - a_1) - d_2 < 1 \\ \text{Für } a_2 := a_1 + \frac{d_2}{100} \text{ folgt } 0 \le 100(x - a_2) < 1 \end{cases}$$

$\vdots$

$$a_n = a_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \dots + \frac{d_n}{10^n}$$

$$\Rightarrow 0 \le 10^n(x - a_n) < 1$$

$$\Rightarrow |x - a_n| = x - a_n < \frac{1}{10^n} \to 0$$

$\Rightarrow (a_n)$ ist Dezimalbruch und konv. gegen x.

Für $x < 0$ führe das Verfahren für $-x$ durch. $\square$

Dieses Verfahren liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$ einen eindeutigen Dezimalbruch. Alle Dezimalbrüche kommen vor bis auf diejenigen, die ab einer Nachkommastelle lauter Neuner besitzen: $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall j > N: d_j = 9$.

$b_n - a_n < \varepsilon$

ZB. $3{,}1\overline{9} = 3{,}1999\ldots$

$\Rightarrow |3{,}2 - a_n| = |3{,}2 - 3{,}1\underbrace{9\ldots9}_{n-1}| = \left(\frac{1}{10}\right)^n \to 0$

Für $x = 3{,}2$ liefert das obige Verfahren

aber $x = 3{,}200\ldots$

$\Rightarrow 3{,}1\overline{9} = 3{,}2$

2.32 Bem: Entsprechend g-adische Darstellung:

$x = (a_N a_{N-1} \ldots a_0, a_1 a_2 \ldots)_g$

$:= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_{N-j}\, g^N \left(\frac{1}{g}\right)^j$

wobei $a_j \in \{0, \ldots, g-1\}$

2.33 Satz 1) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar

2) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

3) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ exist. eine rationale Folge (q_n) mit $q_n \to x$. Man sagt: $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.

Beweis: 1) Cantorsches Diagonalverfahren, siehe Beisp. nach 1.58.

3) Wähle (q_n) als Dezimalbruch zu x.

2) Sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Zeige f ist nicht surjektiv. Dann kann es keine bijektive Abb. von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ geben, $\mathbb{R}$ ist also nicht abzählbar

Sei $f(j) = a^{(j)}_{0,}\ldots$

Definiere $x \in \mathbb{R}$ d…

$d_n := \begin{cases} 1 & \text{fal…} \\ 0 & \text{an…} \end{cases}$

$\Rightarrow x$ und $f(j)$ … j-ten Nachko…

$\Rightarrow \forall j \in \mathbb{N}: x \neq f\ldots$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus f(\mathbb{N}\ldots$

$\Rightarrow f$ ist nicht su…

Sei $f(j) = a_0^{(j)}, d_1^{(j)} d_2^{(j)} \dots$

Definiere $x \in \mathbb{R}$ durch $x = 0, d_1 d_2 \dots$ und

$$d_k := \begin{cases} 1 & \text{falls } d_k^{(k)} = 0 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ x und $f(j)$ unterscheiden sich in der j-ten Nachkommastelle

$\Rightarrow \forall j \in \mathbb{N}: x \neq f(j)$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus f(\mathbb{N})$

$\Rightarrow$ f ist nicht surjektiv

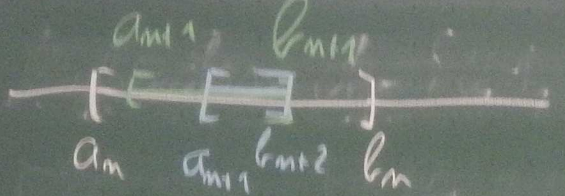
2.34 Def: 1) Eine Folge heißt monoton wachsend (fallend), falls

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \geq a_n \quad (a_{n+1} \leq a_n)$$

2) Seien (a_n), (b_n) Folgen. Die Folge $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ von Intervallen heißt

Intervallschachtelung, falls

- (a_n) mon. wachsend und
- (b_n) " fallend und
- $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq b_n$ und
- $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$.



2.35 Satz: Ist $([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung, so konv. (a_n) und (b_n) und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: x \quad \text{und}$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}$$

D.h. die Intervalle ziehen sich auf einen Punkt x zusammen.

Beweis: 1) (a_n) konvergiert: Zeige, dass (a_n) Cauchy-Folge ist.

Sei $\varepsilon > 0$ fest gewählt.

$$b_n - a_n \to 0 \Rightarrow \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : b_n - a_n < \varepsilon$$

Für $m > n > N_\varepsilon$ folgt

$$|a_m - a_n| \overset{a_m \geq a_n}{=} a_m - a_n \overset{a_m \leq b_m}{\leq} b_m - a_n \overset{b_m \leq b_n}{\leq} b_n - a_n < \varepsilon$$

$$\Rightarrow a_n \to a \in \mathbb{R}$$

2) Zeige $b_n \to a$. Sei $\varepsilon > 0$ fest.

$$a_n \to a \Rightarrow \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$b_n - a_n \to 0 \Rightarrow \exists \tilde{N}_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > \tilde{N}_\varepsilon : |b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Für $n > \max\{N_\varepsilon, \tilde{N}_\varepsilon\}$ folgt

$$|b_n - a| = |b_n - a_n + a_n - a|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a|$$

$$< \varepsilon$$

Zeige:

3) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a \in [a_n, b_n]$. Dann $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$

Für $m > n$: $\quad a_m \geq a_n \Rightarrow a = \lim_{m \to \infty} a_m \overset{2.22}{\geq} a_n$

$$b_m \leq b_n \Rightarrow a = \lim_{m \to \infty} b_m \leq b_n$$

Also: $\{a\} \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$

4) Zeige: $y > a \Rightarrow y \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$

$y < a \Rightarrow$ ''

Dann: $\{a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

Sei $y > a = \lim_{n \to \infty} a_n$

Wähle $\varepsilon := \frac{y-a}{2}$. Für $n > N_\varepsilon$ folgt

$$a_n = a_n - a + a$$

$$\overset{x \leq |x|}{\leq} \underbrace{|a_n - a|}_{< \varepsilon} + a$$

$$< a + \varepsilon$$

$$= a + \frac{y-a}{2}$$

$$= \frac{y+a}{2}$$

$$= y - \frac{y-a}{2}$$