2.4.2 Folgen in $\mathbb{C}$

Erinnerung (siehe 2.20)

$$z_n \to z \iff \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \forall n>N_\varepsilon : |z_n - z| < \varepsilon$$

2.53 Hilfssatz: Für $z = x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$, gilt

$$|z| \le |x|+|y| \le \sqrt{2}\,|z|$$

Wenn $|z|$ klein ist, dann sind auch $|x|,|y|$ klein und umgekehrt.

Beweis: 1) $|z|^2 = x^2+y^2 \le \underbrace{x^2}_{=|x|^2 \text{ da } x\in\mathbb{R}} + 2|x||y| + y^2 = (|x|+|y|)^2$

$\Rightarrow |z| \le |x|+|y|$

2) $0 \le (|x|-|y|)^2 = |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2$

$\Rightarrow 2|x||y| \le |x|^2+|y|^2$

3) $(|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$

$\overset{2)}{\le} |x|^2+|x|^2+|y|^2+|y|^2$

$= 2(|x|^2+|y|^2)$

$\Rightarrow |x|+|y| \le \sqrt{2}\sqrt{|x|^2+|y|^2} = \sqrt{2}\,|z|$ $\square$

2.54 Satz: Seien $x_n, y_n, x, y\in\mathbb{R}$, $z_n := x_n + i y_n$, $z = x+iy$. Dann

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$

$(z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (Δ-Ungleichung)

2) (z_n) ist Cauchy-Folge $\Leftrightarrow$ (x_n), (y_n) Cauchy-Folgen

3) $\mathbb{C}$ ist vollständig

Beweis: 1) $|z_n - z_m| < \varepsilon$ $\begin{cases} \overset{2.53}{\Rightarrow} |x_n - x_m| < \sqrt{2}\varepsilon \wedge |y_n - y_m| < \sqrt{2}\varepsilon \\ \overset{2.53}{\Leftarrow} |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

2) Genauso wie 1)

3) $\underbrace{\text{Sei } (z_n) \text{ Cauchy-Folge in } \mathbb{C}}$. Z.z. (z_n) konv.

$\overset{2)}{\Rightarrow}$ (x_n), (y_n) Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$

$\overset{\mathbb{R} \text{ vollst.}}{\Rightarrow}$ $x_n \to x \wedge y_n \to y$ in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow z_n \to x + iy$ □

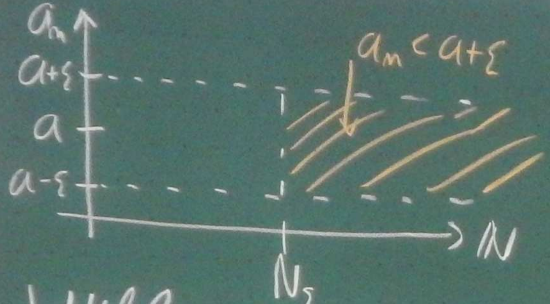
2.55 Bsp: 1) $z_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0 \text{ in } \mathbb{R}} + i \underbrace{\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}_{\to 2 \text{ in } \mathbb{R}} \to 0 + 2i$

2) $z_n = \frac{1}{n} + in$. $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent $\Rightarrow (z_n)$ divergent

3) $z_n = (-1)^n - \frac{1}{n}$. $(\operatorname{Re} z_n) = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist div. $\Rightarrow (z_n)$ "

2.56 Rechenregeln für konv. Folgen: Seien (a_n), (b_n) konv. Folgen in $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$). Dann:

1) $\exists M \in \mathbb{R}^+ \; \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \le M$
(Jede konv. Folge ist beschränkt)



Wähle $\varepsilon = 1$. $a_n \to a \Rightarrow \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < 1$

$\Rightarrow \forall n > N_\varepsilon : |a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$

Setze $M := \max\{\underbrace{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_\varepsilon}|, 1+|a|}\}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$

endliche Menge $\subseteq \mathbb{R}$ besitzt größtes Element

2) $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konv. und: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Sei $\varepsilon > 0$ fest. $\begin{cases} a_n \to a \Rightarrow \exists N_\varepsilon \, \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ b_n \to b \Rightarrow \exists \tilde{N}_\varepsilon \, \forall n > \tilde{N}_\varepsilon : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

Für $n > \max\{N_\varepsilon, \tilde{N}_\varepsilon\} : |(a_n + b_n) - (a+b)| =$

$= |(a_n - a) + (b_n - b)| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$

3) $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow (\lambda \cdot a_n)$ ist konv., $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Fall $\lambda = 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} 0 \cdot a_n = 0 = 0 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Fall $\lambda \neq 0$: Sei $\varepsilon > 0$. $a_n \to a \Rightarrow \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$

Für $n > N_\varepsilon$: $|\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda (a_n - a)| \overset{(13.2)}{=} |\lambda| \, |a_n - a| < \varepsilon$.

4) $(|a_n|)$ ist konv. und $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$

Sei $a_n \to a$. Zeige $|a_n| \to |a|$

$\big||a_n| - |a|\big| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\overset{\text{umgedrehte}}{\leq}} |a_n - a| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$

5) $(a_n \cdot b_n)$ ist konv. u. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$a_n \to a \overset{1)}{\Rightarrow} \exists M \in \mathbb{R}^+ \; \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \le M$

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)|$$

$$\overset{(B3),(B2)}{\le} |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$$

$$\le M \cdot |b_n - b| + (|b|+1)|a_n - a|$$

Zu $\varepsilon > 0$: $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon: |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$

$\exists \tilde{N}_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > \tilde{N}_\varepsilon: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$

$\Rightarrow$ Für $n > \max\{N_\varepsilon, \tilde{N}_\varepsilon\}$: $|a_n b_n - ab| < M \frac{\varepsilon}{2M} + (|b|+1)\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} = \varepsilon$

6) Sei zusätzlich $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$. Dann:

a) $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon: a_n \ne 0$

b) Setze $c_n := \begin{cases} \frac{b_n}{a_n} & \text{für } n > N_\varepsilon \\ 0 & \text{für } n \le N_\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$

a) Setze $\varepsilon := \frac{|a|}{2}$, wobei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$

Für $n > N_\varepsilon$: $|a_n| = |a_n - a + a| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\overset{\text{umgedrehte}}{\ge}} \big||a| - |a_n - a|\big|$

$$\ge |a| - \underbrace{|a_n - a|}_{< \varepsilon = \frac{|a|}{2}} > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$$

$\Rightarrow \forall n > N_\varepsilon: \left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{2}{|a|}$

b) Für $n > N_\varepsilon$: $\left|\frac{b_n}{a_n} - \frac{b}{a}\right| = \left|\frac{b_n a - a_n b}{a_n a}\right| \overset{(B2)}{=} \frac{1}{|a_n||a|} \left|b_n(a - a_n) + a_n(b_n - b)\right|$

$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (Δ-Ungleichung)

Beweis a)

$$\le \frac{2}{|a|}\cdot\frac{1}{|a|}\left(\underbrace{|b_n|}_{\le M}|a-a_n| + \underbrace{|a_n|}_{\le M}|b_n - b|\right) < \varepsilon \text{ für } n > N_\varepsilon$$

7) Sei zusätzlich: (a_n), (b_n) reelle Folgen und

a) $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \le b_n$. Dann $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$

$c_n := b_n - a_n \ge 0$, (c_n) konv. nach 2.) u. 3.)

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n \ge 0$$

2.22
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n \ge 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n \ge \lim_{n\to\infty} a_n$

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \wedge \forall n \in \mathbb{N}: a_n \le c_n \le b_n$

$\Rightarrow (c_n)$ konv. $\wedge \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Beweis: Übungsaufgabe

z.B. $$a_n = \frac{2^n + 7^n i}{n - 2\cdot 7^n i} = \frac{\cancel{7^n}\left(\overbrace{\left|\frac{2}{7}\right|^n}^{\to 0} + \overbrace{i}^{\to i}\right)}{\cancel{7^n}\left(\underbrace{\frac{n}{7^n}}_{\to 0} - \underbrace{2i}_{\to -2i}\right)} \begin{matrix}\}\to 0 + i \\ \}\to 0 - 2i \ne 0\end{matrix}$$

$$\longrightarrow \frac{0+i}{0-2i} = -\frac{1}{2}$$

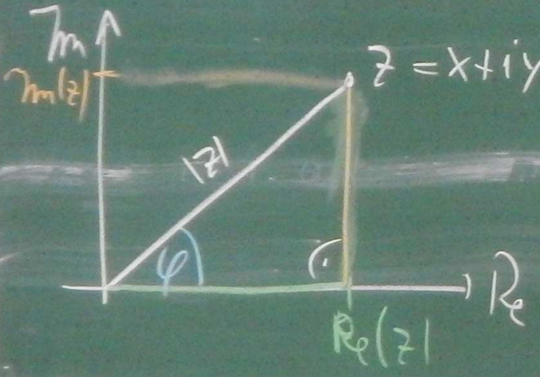
$$a_n = \frac{n^2 + i n^3}{1 + i n^2} = \underbrace{\frac{n^3}{n^2}}_{=n} \underbrace{\frac{\frac{1}{n} + i}{\frac{1}{n^2} + i}}_{=b_n \to 1} \begin{matrix}\}\to i \\ \}\to i\end{matrix} \Rightarrow |b_n| > \frac{1}{2} \text{ für } n > N_\varepsilon$$

$\Rightarrow |a_n| > \frac{n}{2}$ für $n > N_\varepsilon$

$\Rightarrow (a_n)$ nicht beschränkt

$\Rightarrow (a_n)$ divergent

2.43 Polardarstellung



$$\sin(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$$

$$\Rightarrow z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

Falls $0 \le \varphi < 2\pi$ vorausgesetzt: φ eindeutig

2.57 Satz: Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ exist. eindeutige Zahlen $r \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, so dass

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \qquad (*)$$

(*) heißt Polardarstellung von z. Es gelten

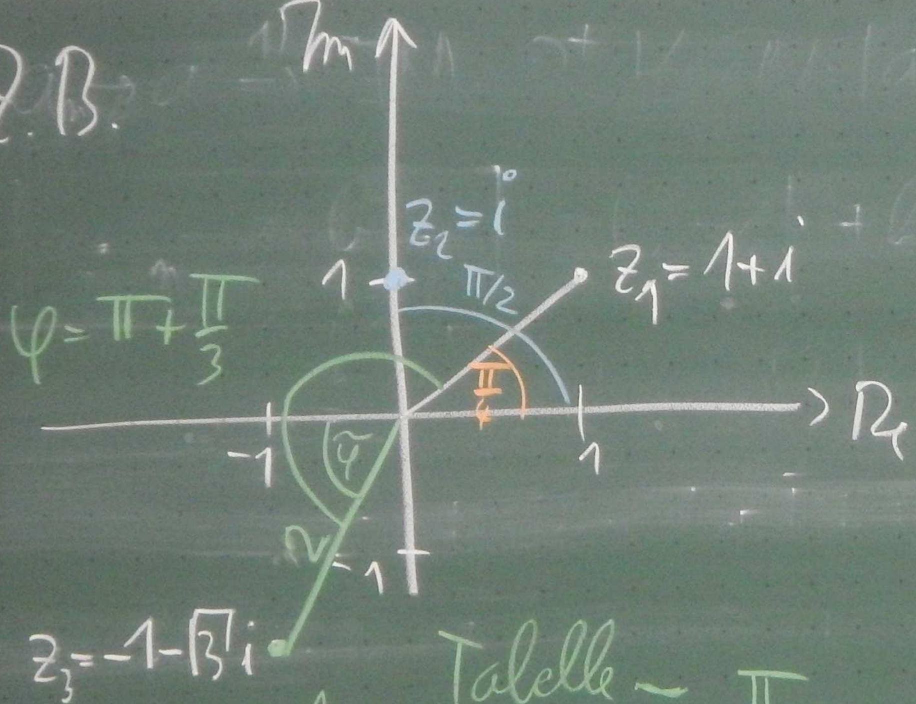
$$r = |z|, \quad \cos(\varphi) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}, \quad \sin(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}, \quad \tan(\varphi) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}$$

Der Winkel φ heißt Argument von z: $\varphi = \arg(z)$

2.58 Tabelle wichtiger Werte:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\varphi)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(\varphi)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

z.B.:



$$\cos(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2} \overset{\text{Tabelle}}{\Longrightarrow} \tilde{\varphi} = \frac{\pi}{3}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = 1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$z_4 = -3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$z_5 = 5 = 5(\cos 0 + i \sin 0)$$