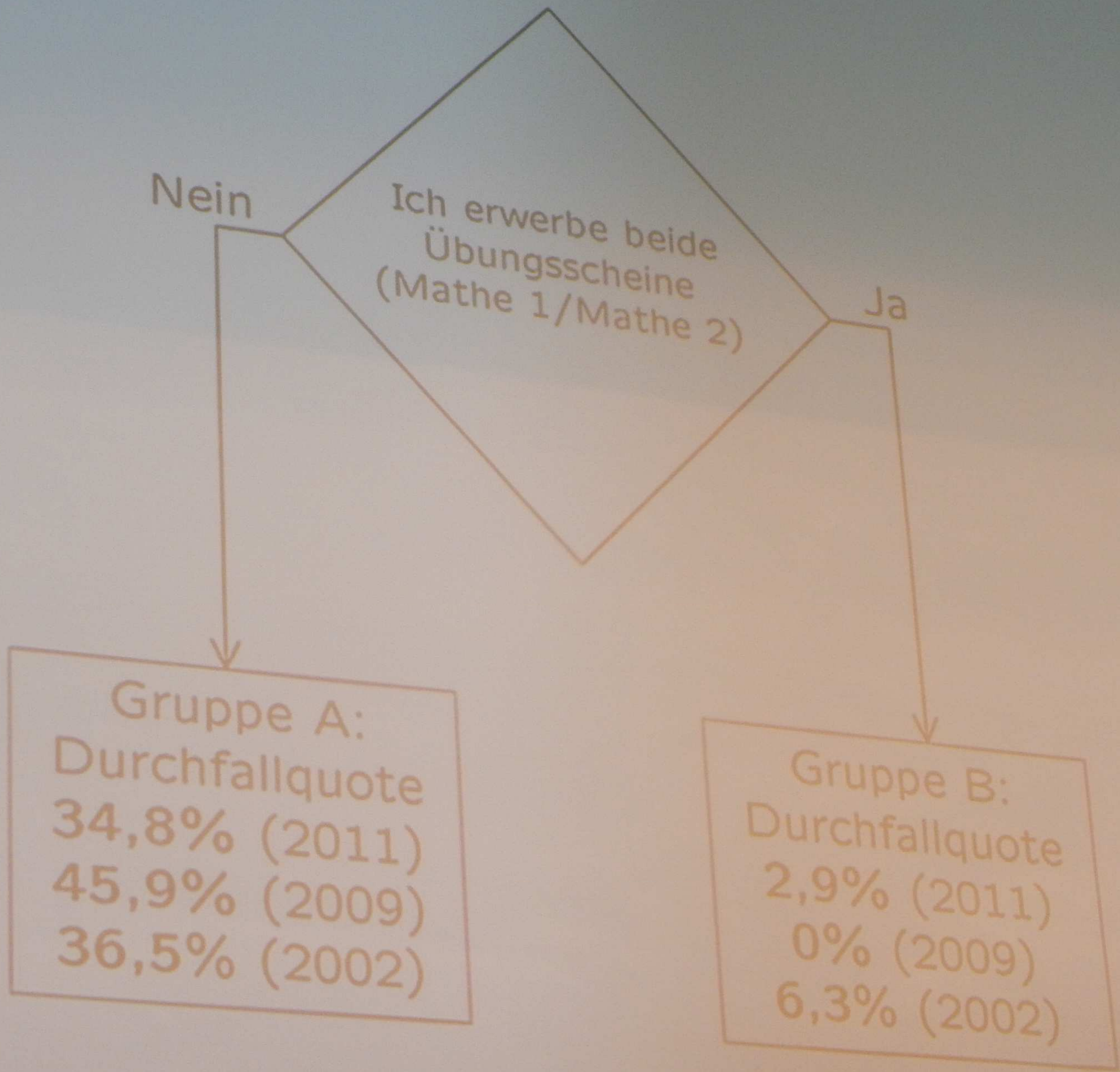
Sie haben die Wahl



2.4 Die komplexen Zahlen

2.42 Überblick:

$3 + x = 2$ hat keine Lös. in $\mathbb{N}$ $\xrightarrow[+]{\text{Gruppe}}$ $(\mathbb{Z},+)$

$3 \cdot x = 1$ " " " in $\mathbb{Z}$ $\xrightarrow[\cdot]{\text{Gruppe}}$ $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$

$x^2 = 2$ " " " in $\mathbb{Q}$ $\xrightarrow{\text{Vollst.}}$ $(\mathbb{R},+,\cdot)$

$x^2 = -1$ " " " " $\mathbb{R}$ $\xrightarrow[\text{Einheit}]{\text{Imag.}}$ $(\mathbb{C},+,\cdot)$

Aber in $\mathbb{C}$ gibt es keine Anordnung

2.41 Der Körper der komplexen Zahlen

2.43 Idee:
Ann., es gebe einen Körper $\mathbb{C}$, der die reellen Zahlen umfasst und eine Zahl i enthält mit $i^2 = -1$

$\Rightarrow$ Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist auch $z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$

Anwendung Körper-Rechenregeln:

$$(x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) \overset{AG}{\underset{KG}{=}} x_1 + x_2 + i y_1 + i y_2 \overset{DG}{=} x_1 + x_2 + i \cdot (y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) \overset{DG,KG}{\underset{AG}{=}} x_1 x_2 + x_1 i y_2 + i y_1 x_2 + \underbrace{i y_1 i y_2}_{= i^2 y_1 y_2} \overset{DG}{\underset{KG}{=}} x_1 x_2 - y_1 y_2 + i (x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

2.44 Satz: $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

ist ein Körper mit

Nullelement $(0,0) =: 0$ (Neutral +)

Einselement $(1,0) =: 1$ (Neutral ·)

$$(x,y) \cdot (1,0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1)$$
$$= (x,y)$$

Invers +: $-(x,y) = (-x,-y)$

Invers ·: $\frac{1}{(x,y)} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

$$(x,y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) =$$
$$= \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y(-y)}{x^2+y^2}, \frac{x(-y)}{x^2+y^2} + \frac{yx}{x^2+y^2}\right)$$
$$= (1,0) = \text{Einselement}$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ heißt Körper der komplexen Zahlen.

In $\mathbb{C}$ kann man rechnen wie in jedem Körper.

2.45 $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$: Die Abb.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto (x, 0)$$

ist injektiv, und es gelten

$$f(x_1 +_{\mathbb{R}} x_2) = (x_1 +_{\mathbb{R}} x_2, 0) = (x_1, 0) +_{\mathbb{C}} (x_2, 0) = f(x_1) +_{\mathbb{C}} f(x_2)$$

$f(x_1) \cdot_{\mathbb{C}} f(x_2) = (x_1, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (x_2, 0) = (x_1 \cdot_{\mathbb{R}} x_2, 0) = f(x_1 \cdot_{\mathbb{R}} x_2)$

Identifiziere $x \in \mathbb{R}$ mit $(x,0) \in \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$ mit $f(\mathbb{R})$. Dann:

- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- $+_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}}$ sind Fortsetzungen der Verknüpfungen in $\mathbb{R}$.

Außerdem gilt für $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot_{\mathbb{C}} (x,y) := (\alpha, 0) \cdot_{\mathbb{C}} (x,y) = (\alpha \cdot x - 0, 0 + \alpha y)$$
$$= (\alpha x, \alpha y)$$
$$\overset{KG}{=} (x,y) \cdot_{\mathbb{C}} \alpha$$

Im Folg: Unterscheide nicht mehr zwischen $+_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}}$ und $+_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}$

__2.4.6 Vereinfachung__: Setze

$$i := (0,1) \quad \underline{\text{imaginäre Einheit}}$$

Dann:

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0-1, 0+0) = \underbrace{(-1,0)}_{=f(-1)}$$
$$= -1 \in \mathbb{R}$$

Für $(x,y) \in \mathbb{C}$ gilt

$$x + iy = (x,0) + (0,1)\cdot(y,0)$$
$$= (x,0) + (0-0, 0+y)$$
$$= (x,y)$$

Schreibe statt (x,y) auch $x+iy$ (mit $x,y \in \mathbb{R}$), __Normalform__ einer kompl. Zahl.

Fazit: Schreibe komplexe Zahlen in der Form $x+iy$ mit $x,y \in \mathbb{R}$, rechne wie in $\mathbb{R}$, beachte zur Zusammenfassung $i^2=-1$.

z.B. $\underline{(2-i)}+\underline{(5+3i)} = \underline{7+2i}$

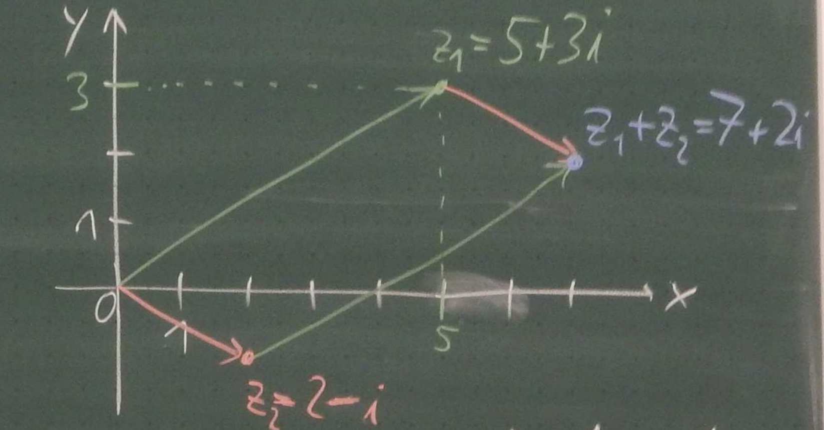
$$(2-i)\cdot(5-3i) = 10-6i-5i+\underbrace{(-i)(-3i)}_{=3i^2=-3}$$

$$= 7-11i$$

$$\frac{4+i}{2+3i} = \frac{4+i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i} = \frac{8-12i+2i-3i^2}{4-(3i)^2}$$

$$= \frac{11-10i}{13} = \frac{11}{13}-\frac{10}{13}i$$

Veranschaulichung in der <u>Gauß-schen</u> Zahlenebene:



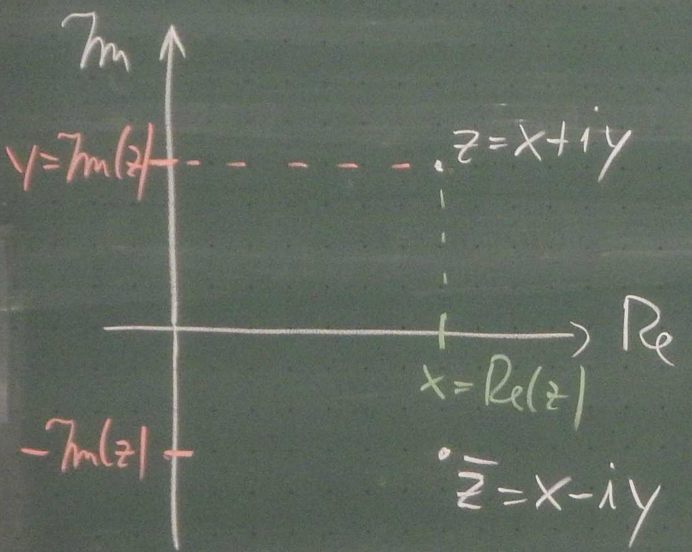
Addition $\hat{=}$ aneinandersetzen der zugehörigen Vektoren

<u>2.47 Def</u>: Für $z = x+iy$ mit $x,y \in \mathbb{R}$ heißt

1) x Realteil von z : $x = \mathrm{Re}(z)$

2) y Imaginärteil von z: $y = \mathrm{Im}(z)$

3) $\bar{z} := x - iy$ konjugierte Zahl zu z



Achtung:

$\mathrm{Im}(7+2i) = 2$ ohne i

$\cancel{\mathrm{Im}(7+2i) = 2i}$

2.48 Satz: Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten

1) $z \mapsto \bar{z}$ entspricht Spiegelung an reeller Achse

2) $\overline{(\bar{z})} = z$ ($z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$

$\Rightarrow \bar{\bar{z}} = x - (-iy) = x + iy = z$)

3) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$

($z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = x + i \cdot 0 \Rightarrow \bar{z} = x - i \cdot 0 = z$

$\bar{z} = z \overset{z = x+iy}{\Leftrightarrow} x + iy = x - iy \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$)

4) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$\left.\begin{array}{l} z = x+iy \\ \Rightarrow \bar{z} = x - iy \end{array}\right\} \Rightarrow z + \bar{z} = x + x = 2\,\mathrm{Re}(z)$

$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

$\left.\begin{array}{l} z = x+iy \\ \bar{z} = x - iy \end{array}\right\} \Rightarrow z - \bar{z} = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

5.) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$z_1 = x_1 + iy_1 \Rightarrow \overline{z_1} = x_1 - iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow \overline{z_2} = x_2 - iy_2$

$\overline{z_1+z_2} = \overline{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = x_1+x_2-i(y_1+y_2)$

$\overline{z_1}+\overline{z_2} = x_1+x_2-iy_1-iy_2 \Leftarrow =$

6) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, falls $z\neq 0$: $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

$\left.\begin{array}{l} z_1 = x_1+iy_1 \\ z_2 = x_2+iy_2 \end{array}\right\} \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2+y_1x_2)}$

$= x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2+y_1x_2) \Leftarrow =$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = (x_1-iy_1)\cdot(x_2-iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(-x_1y_2 - y_1x_2)$

7) $z = x+iy,\ x,y\in\mathbb{R} \Rightarrow z\cdot\bar z = x^2+y^2 \in \mathbb{R}_0^+$

$z\cdot\bar z = (x+iy)(x-iy) = x^2-(iy)^2 = x^2+y^2$

Methode zur Division: bei $z_2\neq 0$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{\underbrace{z_2\cdot\overline{z_2}}_{\in\mathbb{R},\ >0 \text{ da } z_2\neq 0}} = \frac{1}{\text{reelle Zahl}}\cdot z_1\overline{z_2}$$

2.49 Bem: Wegen $i^2 = -1^2$ kann $\mathbb{C}$ nicht angeordnet werden:

Falls es eine Anordnung gäbe: $\forall z\in\mathbb{C}: z^2\geq 0$

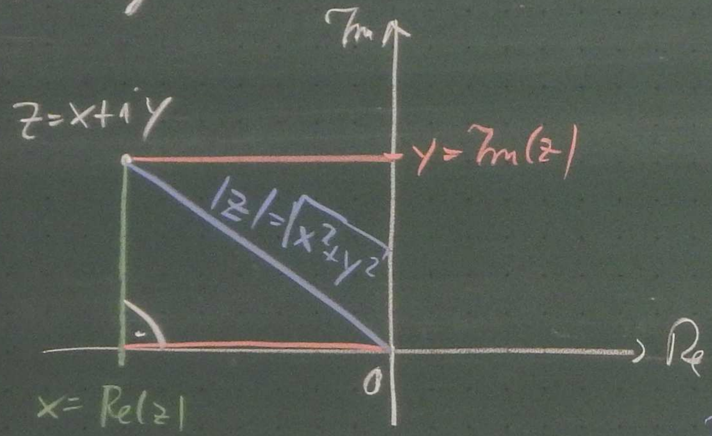
$\Rightarrow i^2\geq 0 \wedge 1^2 \geq 0$

$i^2 = -1^2 \Rightarrow i^2 \geq 0 \wedge i^2\leq 0 \Rightarrow i^2 = 0$ ↯

2.50 Def: Für $z = x + iy$ heißt

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Betrag von z.



Pythagoras: $(\text{Länge blaue Seite})^2 = x^2 + y^2$

Achtung: $|4 + 2i| \neq \cancel{\sqrt{4^2 + (2i)^2}}$

$= \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

2.51 Hilfssatz: 1) $|z| = |\bar{z}|$

2) $|Re(z)| \leq |z|$

$\left(z = x + iy \Rightarrow |Re(z)| = |x| = \sqrt{x^2} \overset{\text{mon. } \sqrt{\ }}{\leq} \sqrt{x^2 + y^2} = |z|\right)$

$|Im(z)| \leq |z|$

3) $z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow |z|_{\mathbb{C}} = |x|_{\mathbb{R}}$ $\left(z = x + i0 \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + 0} = |x|\right)$

2.52 Satz: $(\mathbb{C}, +, \cdot, |\ |)$ ist ein bewerteter Körper,

d.h. (B1) $|z| \geq 0 \wedge (|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$

(B2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \, |z_2|$

(B3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Δ-Ungl.)

Insbes.: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ falls $z_2 \neq 0$. (vgl 2.17) und $|z_1 \pm z_2| \geq \big| |z_1| - |z_2| \big|$

(umgedrehte Δ-Ungl.)