2.72 Reelle Polynome: $P \in \mathbb{R}[x] \wedge P(\lambda) = 0$

$\Rightarrow P(\bar{\lambda}) = 0.$

Beweis: $P(\bar{\lambda}) = \sum_{k=0}^{m} \underbrace{a_k}_{= \bar{a}_k} \underbrace{(\bar{\lambda})^k}_{= \overline{(\lambda^k)}} = \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_k \overline{(\lambda^k)} = \overline{\sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k}$

da $P \in \mathbb{R}[x]$

$= P(\lambda) = 0$ $\square$

Sei $P \in \mathbb{R}[x]$, $P(\lambda) = 0$.

Fall 1: $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow P(x) = \underbrace{(x - \lambda)}_{\in \mathbb{R}[x]} \underbrace{P_1(x)}_{\Rightarrow \in \mathbb{R}[x]}$

Fall 2: $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \overset{2.72}{\Rightarrow} P(x) = \underbrace{(x - \lambda)(x - \bar{\lambda})}_{= x^2 - (\lambda + \bar{\lambda})x + \lambda \cdot \bar{\lambda} = x^2 - 2(\operatorname{Re}\lambda)x + |\lambda|^2} P_1(x)$

$\Rightarrow P(x) = \underbrace{(x^2 - 2(\operatorname{Re}\lambda)x + |\lambda|^2)}_{\in \mathbb{R}[x]} \underbrace{P_1(x)}_{\Rightarrow \in \mathbb{R}[x]}$

2.73 Folg: Jedes reelle Polynom ist darstellbar als Produkt linearer oder quadratischer reeller Polynome, wobei die quadratischen Pol.e keine reellen Nullstellen besitzen.

z.B: $P(z) = 1 \cdot z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2$

$P(i) = 1 + 2(-i) + 3(-1) + 2i + 2 = 0$

$\overset{2.72}{\Rightarrow} P(-i) = 0$

$(x-i)(x+i) = x^2+1$

$$\begin{array}{l} (x^4+2x^3+3x^2+2x+2) : (x^2+1) = x^2+2x+2 \\ -(x^4 \quad + x^2) \\ \hline \quad 2x^3+2x^2+2x \\ \quad -(2x^3 \quad +2x) \\ \hline \qquad 2x^2+ \quad +2 \\ \qquad -(2x^2 \quad +2) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$x^2+2x+2=0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$

$\Rightarrow$ komplexe Faktorisierung: $P(z) = 1(z-i)(z+i)(z-(-1+i))(z-(-1-i))$

reelle " : $P(x) = 1(x^2+1)(x^2+2x+2)$

2.7.4 Rationale Nullstellen: Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{Z}$. Ist $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ Nullstelle, und sind p, q teilerfremd, so folgt: p teilt $a_0 \wedge q$ teilt a_m.

z.B. $P(x) = 18x^3+9x^2-8x-4$

$a_m = 18 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$a_0 = -4 = (-1) \cdot 2 \cdot 2$

Mögliche rat. Nullstellen $x = \frac{p}{q}$, $p \mid 4 \wedge q \mid 18$

$\left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{9}, \pm \frac{4}{9}, \pm \frac{1}{18} \right\}$

Probieren: $P(\frac{2}{3}) = 0$

3. Lineare Algebra

3.1 Linearität

3.1 Def: Ein Vektorraum (VR) oder linearer Raum über einem Körper $\mathbb{K}$ (z.B. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) ist eine abelsche Gruppe $(V,+)$, versehen mit einer Skalarenmultiplikation $\cdot : \mathbb{K}\times V \to V : (\lambda, v) \mapsto \lambda\cdot v$, so dass

(S1) $(\lambda+\mu)\cdot v = \lambda\cdot v + \mu\cdot v$

(S2) $\lambda\cdot(v+w) = \lambda\cdot v + \lambda\cdot w$

(S3) $\lambda\cdot(\mu\cdot v) = (\lambda\mu)\cdot v$

(S4) $1\cdot v = v$

Die Elemente $v\in V$ des Vektorraumes heißen Vektoren.

Das neutrale Element in $(V,+)$ heißt Nullvektor: 0.

Beisp.: 1) $V=\mathbb{R}^n = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} : x_j\in\mathbb{R}\right\}$ ist VR über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n\end{pmatrix}, \quad \lambda\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n\end{pmatrix}$$

$0=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$, $(\mathbb{R},+)$ abelsche Gruppe $\Rightarrow$ $(V,+)$ abelsche Gr.

(S1) $(\lambda+\mu)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\lambda+\mu)\cdot x_1\\ \vdots \\ (\lambda+\mu)x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1+\mu x_1\\ \vdots\\ \lambda x_n+\mu x_n\end{pmatrix}$

$\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1+\mu x_1\\ \vdots\\ \lambda x_n+\mu x_n\end{pmatrix}$ $=$

2) $V_2=\mathbb{C}^n=\left\{\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}: z_j\in\mathbb{C}\right\}$, Def +, · wie in 1) $\Rightarrow$ V_2 ist VR über $\mathbb{C}$ oder über $\mathbb{R}$.

Achtung: $\mathbb{R}^n$ ist kein VR über $\mathbb{C}$

3) Vektorraum der Folgen:

$V_3=\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n\in\mathbb{N}: a_n\in\mathbb{C}\}$ ist VR über $\mathbb{C}$:

$(a_n)+(b_n):=(a_n+b_n)$, $\lambda\cdot(a_n):=(\lambda a_n)$

4) Vektorraum der konv. Folgen:

$V_4=\{(a_n) \text{ Folge in } \mathbb{C} \mid \exists a\in\mathbb{C}: a_n\to a\}$

ist VR über $\mathbb{C}$ mit +, · wie in 3)

Hier wichtig: (a_n) konv. $\wedge$ (b_n) konv. $\Rightarrow \begin{cases}(a_n+b_n) \text{ konv.}\\ (\lambda a_n) \text{ konv.}\end{cases}$

$V_4\subseteq V_5 \Rightarrow V_4$ ist UVR von V_5

5) $V_5:=\{f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\}$ Vektorraum der komplexen Funktionen.

$f+g: z\mapsto f(z)+g(z) \Rightarrow f+g\in V_5$

$\lambda\cdot f: z\mapsto \lambda f(z) \Rightarrow \lambda f\in V_5$

Nullvektor: $z\mapsto 0$

6) $V_6=\mathcal{P}:=\{P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\mid P \text{ ist Polynom}\}\subseteq V_5$

ist VR über $\mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ Untervektorraum.

3.2 Rechenregeln: Ist $(V,+,\cdot)$ ein VR, so gelten:

1) $\lambda \cdot v = 0 \iff \underset{\in \mathbb{K}}{\lambda = 0} \vee \underset{\in V}{v = 0}$

2) $(-1)\cdot v = -v$ (inverses El. zu v in $(V,+)$).

3) Zu $u, v \in V$ besitzt die Gleich. $u + x = v$ eine eindeutige Lös. $x \in V$, nämlich $x = v + (-u) =: v - u$

Beweis: 1) "$\Leftarrow$" Fall $\lambda = 0$:

$$0 \cdot v = (0+0)\cdot v \overset{(S1)}{=} 0\cdot v + 0 \cdot v \quad | + (-(0\cdot v))$$

$$\Rightarrow 0 = 0 \cdot v + 0 = 0 \cdot v$$

Fall $v = 0$. Genauso $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0+0) \overset{(S2)}{=} \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 \Rightarrow \lambda \cdot 0 = 0$

"$\Rightarrow$" Sei $\lambda \cdot v = 0$. Fall 1: $\lambda = 0$ ✓

Fall 2: $\lambda \neq 0$: $v \overset{(S4)}{=} 1 \cdot v = \frac{\lambda}{\lambda}\cdot v \overset{(S3)}{=} \frac{1}{\lambda}\cdot(\lambda \cdot v) = 0$

2) $v + (-1)\cdot v = 1 \cdot v + (-1)\cdot v \overset{(S1)}{=} (1-1)\cdot v = 0 \cdot v \overset{1)}{=} 0$

Inverses eindeutig $\Rightarrow (-1)\cdot v = -v$

3) Gilt in jeder Gruppe ($+$ statt $\circ$, $-u$ statt u^{-1}), vgl 2.3

3.3 Def. Sei $(V,+,\cdot)$ VR über $\mathbb{K}$. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Untervektorraum (UVR) von V, falls $(U,+,\cdot)$ ein VR ist.

3.4 Untervektorraumkriterium: Seien $(V,+,\cdot)$ ein VR und $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

(i) U ist UVR von V

(ii) $\forall\, v,w \in U \;\forall\, \lambda,\mu \in \mathbb{K}: \lambda\cdot v + \mu \cdot w \in U$

(iii) $(\forall\, v,w \in U: v+w \in U) \wedge \forall v \in U\, \forall \lambda \in \mathbb{K}: \lambda \cdot v \in U$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) klar

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Wähle $\lambda = \mu = 1$ bzw. $\mu = 0$

(iii) $\Rightarrow$ (i): $(U,+)$ ist abelsche Gruppe, da

$+$ ist assoziativ, da $(V,+)$ Gruppe

$+$ ist komm., da $(V,+)$ abelsche Gr.

$U \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, u_0 \in U \Rightarrow 0 = 0\cdot u_0 \in U$

$\Rightarrow$ Neutrales El. = Nullvektor $\in U$

Inverses El.: $u \in U \overset{(iii)}{\Rightarrow} \underbrace{(-1)\cdot u}_{=-u} \in U \Rightarrow$ Inverses El. $-u \in U$.

(S1)–(S3) gelten, da $(V,+,\cdot)$ ein VR ist. $\square$

Bsp.: 1) $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ist UVR nach (ii)

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1$$

$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ist kein UVR nach (iii)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U_2$$

$$U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$ Ursprungsgerade

ist ein UVR nach (ii):

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ 2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 + \mu y_1 \\ 0 \\ 2(\lambda x_1 + \mu y_1) \end{pmatrix} \in U_3$$

2) $V = \{ (a_n)$ Folge in $\mathbb{C} \}$

$U_1 := \{ (a_n)$ Folge in $\mathbb{C} : a_n \to 0 \}$ ist ein UVR nach (ii)

$$\lambda(a_n) + \mu \cdot (b_n) = (\lambda a_n + \mu b_n) \wedge \lambda a_n + \mu b_n \to \lambda \cdot \lim_{n \to \infty} a_n + \mu \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot (a_n) + \mu \cdot (b_n) \in U_1$$

$U_2 = \{ (a_n) : a_n \to 1 \}$ ist kein UVR, da $a_n \to 1 \wedge b_n \to 1 \Rightarrow a_n + b_n \to 2$

3) $P = \{$ komplexe Polynome $\}$

$P_n := \{$ komplexe Polynome vom Grad $\le n \}$

ist UVR nach (iii)