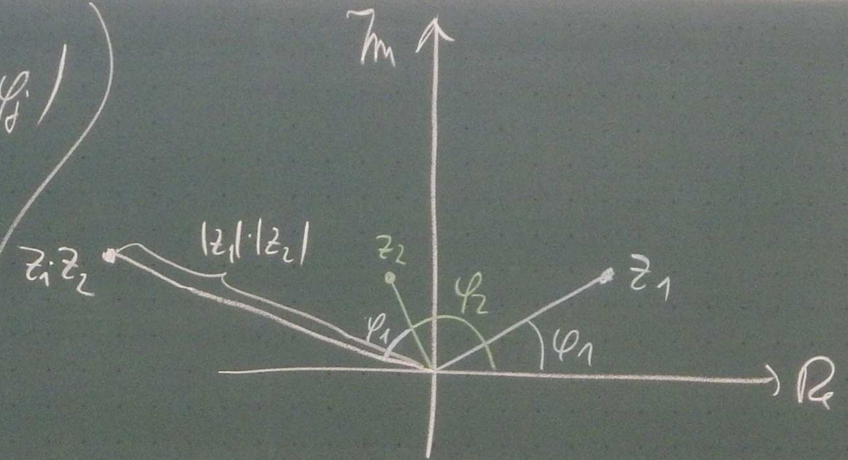
2.59 Multiplikation: $z_j = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j)$

$$\Rightarrow z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\cdot\Big(\underbrace{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}_{=\cos(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Additionstheoreme

$$+\, i\,\underbrace{(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)}_{=\sin(\varphi_1+\varphi_2)}\Big)$$

Fazit: Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem die Beträge multipliziert und die Argumente addiert werden



2.60 Vereinfachung: Man schreibt

$e^{i\varphi} := (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (φ im Bogenmaß)

Polardarstellung: $z = re^{i\varphi}$, $r > 0$, $\varphi = \arg(z)$

Multiplikation: $r_1 e^{i\varphi_1}\, r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

Wichtig: $|e^{i\varphi}| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$

z.B. $1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow (1+i)^n = \sqrt{2}^n \cdot e^{i\frac{\pi}{4}n}$

$\Rightarrow (1+i)^{102} = \sqrt{2}^{102} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 102} = 2^{51} \cdot e^{i(25\pi + \frac{\pi}{2})}$

$= 2^{51} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2^{51} i$

2.61 Die n-te Wurzel: Sei $r \in]0,\infty[$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Gleichung $z^n = re^{i\varphi}$ hat genau n verschiedene Lösungen, nämlich

$$z_k = r^{1/n} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Spezialfall $n=2$: Für $z \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty[$ bezeichnen wir mit $\sqrt{a}$ eine der beiden (egal welche) Lösungen von $z^2 = a$.

Beweis: $z_k^n = r^{\frac{n}{n}} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\cdot n} = re^{i\varphi} \cdot \underbrace{e^{i2\pi k}}_{=1} = re^{i\varphi}$

Alle z_k sind verschieden, da die Argumente verschieden sind.

Dass $z^n = re^{i\varphi}$ höchstens n verschiedene Lös besitzt, wird nachher bewiesen.

z.B. $\sqrt{8i}$: Löse $z^2 = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\Rightarrow z_k = \sqrt{8}\cdot e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}} = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}+\pi k},\ k=0,1$$

$$\Rightarrow z_0 = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{8}\Big(\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{4}}_{=\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\underbrace{\sin\tfrac{\pi}{4}}_{=\frac{\sqrt{2}}{2}}\Big) = 2+2i$$

$$z_1 = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{i\pi} = -z_0 = -2-2i$$

2.62 Quadratische Gl.: Die Gleich.

$$az^2+bz+c=0 \text{ mit } a,b,c\in\mathbb{C},\ a\neq 0$$

besitzt genau die zwei Lösungen

$$z_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Beweis: $az^2+bz+c=0 \quad |\cdot\frac{1}{a}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{z^2+\frac{b}{a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{=\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2}+\frac{c}{a} = 0+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow z+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\sqrt{8i+24i} = \sqrt{32i} = 2\sqrt{8i} = 2(2+2i)$ □

z.B.: $z^2+(2+2i)z-6i=0$

$$\Leftrightarrow z_{1/2} = \frac{-(2+2i)\pm\sqrt{(2+2i)^2+4\cdot 6i}}{2} = \frac{-(2+2i)\pm\sqrt{8i+24i}}{2} = \frac{-(2+2i)\pm 2(2+2i)}{2}$$

$$\boxed{\Rightarrow z_1 = 1+i,\ z_2 = -3-3i}$$

2.4.4. Polynome

2.63 Def: 1) Ein Polynom P ist eine Funktion $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}: z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

$= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$

mit den Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$.

Falls $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, heißt das Polynom reell. (Dann betrachte auch $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der Grad des Polynoms: $n = \text{Grad}(P)$. Für das Nullpolynom: $\text{Grad}(0) := -1$.

2) Eine rationale Fkt. ist eine Abb.

$z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$, wobei P, Q Polynome sind und der Defbereich geeignet gewählt wird.

3) Die Menge der komplexen Polynome: $\mathbb{C}[x]$,

" " " reellen " $\mathbb{R}[x]$.

2.64 Bem: $P(z) = (\ldots((a_n \cdot z + a_{n-1}) \cdot z + a_{n-2}) \cdot z \ldots + a_1) z + a_0$

Hierfür werden nur n Multiplikationen benötigt.

zB: $P(z) = 4z^4 - 3z^2 + 2z - 1$

$$= (((4z+0)\cdot z - 3)\cdot z + 2)z - 1$$

a_k	4	0	−3	2	−1
$z=2$		8	16	26	56
	4	8	13	28	55 = P(2)

Klar ist: $P_1, P_2 \neq 0$ Polynome

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 \cdot P_2 \text{ ist Polynom} \\ \operatorname{Grad}(P_1 \cdot P_2) = \operatorname{Grad}(P_1) + \operatorname{Grad}(P_2) \end{cases}$$

Philosophie: Rechnen mit Polynom.

$\hat{=}$ Rechnen in $\mathbb{Z}$.

Rechnen mit rat. Fkt. $\hat{=}$ Rechnen in $\mathbb{Q}$.

2.65 Division mit Rest: P, Q Polynome mit $1 \leq \operatorname{Grad}(Q) \leq \operatorname{Grad}(P)$. Dann exist. eindeutig best. Polynome P_1, R mit

$$P = P_1 \cdot Q + R \wedge \operatorname{Grad}(R) < \operatorname{Grad}(Q).$$

Beweis durch Induktion nach $\operatorname{Grad}(P) - \operatorname{Grad}(Q)$.

ZB: $(3z^3 - z + 1) : (z^2 + z) = 3z - 3 + \frac{2z+1}{z^2+z}$

$$
\begin{array}{l}
-(3z^3 + 3z^2) \\
\hline
-3z^2 - z \\
-(-3z^2 - 3z) \\
\hline
2z + 1
\end{array}
$$

Bzw. $\underbrace{3z^3 - z + 1}_{P} = \underbrace{(3z-3)}_{P_1}\underbrace{(z^2+z)}_{Q} \underbrace{+2z+1}_{R}$

2.66 Satz: $P \in \mathbb{C}[x]$, $\text{Grad}(P) \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dann: $P(\lambda) = 0 \iff (z-\lambda)$ ist Teiler von P,

d.h. $P(z) = (z-\lambda) \cdot P_1(z) + 0$

Beweis: "$\Leftarrow$" $P(\lambda) = (\lambda - \lambda) \cdot P_1(\lambda) = 0$

"$\Rightarrow$" Es gilt $P(z) = P_1(z)\underbrace{(z-\lambda)}_{Q(z)} + R(z)$

mit $\underbrace{\text{Grad}(R) < \text{Grad}(Q) = 1}_{\Rightarrow R = \text{konst.}}$

Setze $z = \lambda$ oben ein:

$\underbrace{P(\lambda)}_{=0} = \underbrace{P_1(\lambda)(\lambda - \lambda)}_{=0} + R(\lambda) \quad \Rightarrow R(\lambda) = 0$

$\Rightarrow R(z) = 0$ für $z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow P(z) = P_1(z)(z-\lambda) + 0.$ $\square$

2.67 Folg: Jedes Pol. vom Grad $n \geq 1$ hat höchstens n Nullstellen.