L linear: $L(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot L(u) + \mu \cdot L(v)$

3.11 Def: Sei $L: V \to W$ linear und bijektiv. Dann heißt L Isomorphismus, die VRe V und W heißen isomorph. Man kann V und W identifizieren, sie sind nur zwei verschiedene Realisierungen desselben VRs.

$$\begin{array}{ccc} V & & W \\ (x,y) & \overset{L}{\longleftrightarrow} & (L(x), L(y)) \\ \downarrow +_V & & \downarrow +_W \\ x+y & \overset{L}{\longleftrightarrow} & L(x)+L(y) \end{array}$$

Bsp: 1) $L: \mathbb{C}^{n+1} \to P_n = \{\text{Polynome vom Grad} \le n\}$

$$L: \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto P: z \mapsto z_1 + z_2 z + z_3 z^2 + \ldots + z_{n+1} z^n$$

2) $L: P \to \{(a_n) \text{ Folge in } \mathbb{C} : \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N: a_n = 0\}$

$$P \text{ mit } P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$$

L ist Isomorphismus.

Anwendung: Ist $\mathbb{K}$ Körper mit n Elementen, so gibt es genau n^n verschiedene Abb. $f: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Der Raum der Polynome soll aber unendlich viele El. enthalten. Definiere $P := \{\text{abbrechende Folgen}\}$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

ist diese Def. äquivalent zu unserer Def. von P.

3.12 Kern und Injektivität: Für $L: V \to W$ lin

sind äquivalent:

(i) L ist injektiv

(ii) $\mathrm{Kern}(L) = \{0\}$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): $L(0) = 0 \Rightarrow \{0\} \subseteq \mathrm{Kern}(L)$

Sei $v \in V \setminus \{0\} \overset{L \text{ injektiv}}{\Rightarrow} L(v) \neq L(0) = 0 \Rightarrow v \notin \mathrm{Kern}(L)$

$\Rightarrow \mathrm{Kern}(L) = \{0\}$

(ii) $\Rightarrow$ (i):

$L(u) = L(v)$

$\Leftrightarrow L(u) - L(v) = 0$

$\overset{L \text{ lin}}{\Leftrightarrow} L(u - v) = 0$

$\Leftrightarrow u - v \in \mathrm{Kern}(L)$

$\overset{(ii)}{\Rightarrow} u - v = 0$, insbes. $u = v$ $\square$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\mathrm{Kern}(L) = \{v \in V : L(v) = 0\}$

Tipps Kurztest: · Rechenregeln für konv. Folgen

· Komplexe Zahlen: Polardarstellung

Re, Im

Addition, Mult., Division

3.2 Lineare Gleichungssysteme, Vorläufiges

3.13 Def: Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_{jk}, b_j \in \mathbb{K}$ gegeben.
Das System aus m Gleichungen für n Variablen x_j

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} (*)$$

heißt lineares Gleichungssystem (LGS). Falls die rechte Seite "verschwindet", d.h. $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, heißt das LGS homogen, andernfalls inhomogen.

Ist $(*)$ inhomogen, so heißt das LGS mit den selben Koeffizienten a_{jk}, aber mit $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ das zugehörige homogene LGS.

Kürzer für $(*)$: $\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = b_j$, $j = 1, \dots, m$

Praktische Schreibweise für kleine LGS:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Beispiele: 1)

$$\begin{aligned} -x_2+x_3&=2 \\ x_1 \qquad +x_3&=2 \\ x_1+x_2 \qquad &=3 \end{aligned}$$

Vertauschen

[=0 für 2)]

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 & \mid \cdot(-1) \\ -x_2 + x_3 = 2 & \\ x_1 + x_2 = 3 & \leftarrow + \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 & \\ -x_2 + x_3 = 2 & \mid \cdot 1 \\ x_2 - x_3 = 1 & \leftarrow + \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ -x_2 + x_3 = 2 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

↯ ⇒ Das LGS besitzt keine Lösung

2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot(-1) \\ \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 1 \\ \leftarrow \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dies bedeutet $0\cdot x_1 + 0\, x_2 + 0\cdot x_3 = 0$ kann weggelassen werden

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ -x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

z.B. x_3 frei wählbar, $x_3 = t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x_1 = 2 - x_3 = 2 - t$, $x_2 = x_3 - 2 = t - 2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ t-2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbb{R}$ beschreibt alle Lösungen oder: $L = \left\{ \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

3) $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 2x_3 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ $x_3 = 1$ eindeutig
z.B. x_2 frei wählbar, $x_2 = t$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+3\cdot 1 - t\\ t\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

3.15 Gauß-Verfahren: 1) Vertausche in $(*)$ die Zeilen, so dass keine Zeile weiter links anfängt als die erste Zeile.

2) Durch Addition von Vielfachen der ersten Zeile zu den anderen erreiche "führende Nullen" ab der 2. Zeile.

3.) Lasse ab jetzt die 1. Zeile unverändert, führe die Schritte 1) und 2) für die restlichen Zeilen durch.

⋮ usw.

Brich das Verfahren ab, wenn das LGS Zeilenstufenform hat, d.h. dass jede Zeile entweder vom linken Rand her mehr aufeinanderfolgende Nullkoeffizienten hat als die darüberstehenden oder aus lauter Nullen besteht links vom Gleichheitszeichen

$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = \cancel{b_1} = 0$ falls hom.

$0 \cdot x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \cancel{b_2} = 0$ System

$\ddots$

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 x_{k-1} + a_{lk}x_k + \dots + a_{ln}x_n = \cancel{b_l} = 0$

$0 = \cancel{b_{l+1}} = 0$

$\vdots$

$0 = \cancel{b_m} = 0$

Klar ist: Falls $b_{l+1} \neq 0 \vee \dots \vee b_m \neq 0 \Rightarrow$ keine Lös. Pech!

Falls $b_{l+1} = b_{l+2} = \dots = b_m = 0$ oder falls $l = m$, kann das LGS „von unten nach oben" aufgelöst werden

3.16 Begründung: Ist $(x_1, \dots, x_n)$ Lös des ursprüngl. LGS $\Rightarrow (x_1, \dots, x_n)$ löst auch das umgeformte LGS

Wir haben ja nur gültige Gleichungen addiert.

Ist $(x_1, \dots, x_n)$ Lös. des umgeformten Systems, dann können die ursprünglichen Gleichungen durch Gauß-Schritte rekonstruiert werden

$\Rightarrow (x_1, \dots, x_n)$ löst das ursprüngliche System.

3.17 Folg.: Ein homogenes System ist immer lösbar, es besitzt zumindest die Lös $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Im Fall $m \leq n-1$ (weniger Zeilen als Variablen) besitzt ein homog

System immer nichttriviale Lösungen.

3.3 Basis und Dimension

3.18 Def. Sei $(V,+,\cdot)$ ein VR über $\mathbb{K}$.

1) Eine Teilmenge $M \subseteq V$ heißt <u>linear unabhängig</u> falls folgende äquivalente Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für jede endliche Teilmenge $\{m_1, \dots, m_n\} \subseteq M$ gilt:

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j m_j = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \right)$$

(ii) Ist $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot m_j$ mit $m_1, \dots, m_n \in M$, so sind die Koeff. $\lambda_1, \dots \lambda_n$ eindeutig

(iii) $\forall m \in M : LH(M \setminus \{m\}) \neq LH(M)$

Falls M nicht linear unabhängig ist, heißt M <u>linear abhängig</u>

2) $B \subseteq V$ heißt <u>Basis</u> von V, falls B linear unabhängig und $LH(B) = V$. Insbes. besitzt jeder Vektor $v \in V$ eine eindeutige Darstellung

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot b_j \quad \text{mit } b_1, \dots, b_n \in B$$

Die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heißen **Koordinaten** von v bezüglich B. Wir schreiben

$$v_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{oder auch} \quad v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$$

Bsp: 1) $V = \mathbb{R}^n$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ j-te Koordinate

$B := \{e_1, \dots, e_n\}$ kanonische Basis

Sei $v \in \mathbb{R}^n$, $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{x_1}_{\text{eindeutig durch } v \text{ bestimmt}} \cdot e_1 + \underbrace{x_2}_{\text{eindeutig}} \cdot e_2 + \dots + \underbrace{x_n}_{\text{eindeutig}} e_n \Rightarrow LH(B) = \mathbb{R}^n$

eindeutig $\Rightarrow B$ lin. unabhängig

2) $V = \mathbb{R}^n$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$, so dass gilt a_{j+1} hat von oben her mehr aufeinanderfolgende Nullen als a_j und $a_{nn} \neq 0$.

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \neq 0 \\ * \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \neq 0 \\ * \end{pmatrix} \quad \dots \quad a_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{nn} \neq 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{B} = \{a_1, \dots, a_n\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^n$.

Sei $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. $v \overset{!}{=} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot a_j$

$x_1 = a_{11}\lambda_1 + 0\lambda_2 + \dots + 0\lambda_n \Rightarrow \lambda_1$ eind.

$x_2 = * \cdot \lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + 0 \dots \Rightarrow \lambda_2$ eindeutig

$\vdots$

$x_n = * \quad \dots \quad + a_{nn}\lambda_n \Rightarrow \lambda_n$ eindeutig

$\Rightarrow \tilde{B}$ ist Basis