35 Def: 1) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \dots, v_n \in V$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Dann heißt

$$v := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j$$

Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_n$

Achtung: Endlich viele Summanden

2) Sei $M \subseteq V$. Dann heißt

$$\langle M \rangle := LH(M)$$
$$= \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot v_j : n \in \mathbb{N}, v_j \in M, \lambda_j \in \mathbb{K} \right\}$$
$$= \{\text{Linearkomb. von Elementen aus } M\}$$

lineare Hülle von M. Offensichtlich:

- $0 \in LH(M)$
- $LH(M)$ ist UVR von V
- $LH(M)$ der "kleinste" UVR von V, der M als Teilmenge enthält:

$$M \subseteq W \wedge W \text{ UVR von } V$$
$$\Rightarrow LH(M) \subseteq W$$

Man sagt: M spannt $LH(M)$ auf.

__Beispiele__: 1) $V=\mathbb{R}^3$ ist VR über $\mathbb{R}$

$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} : \lambda\in\mathbb{R} \right\} = LH(M_1)$

$=$

$M_2 := \left\{ \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} : \lambda\in\mathbb{R} \right\} \Rightarrow LH(M_2) = M_2$

$M_3 := \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \right\} \Rightarrow LH(M_3) = \left\{ \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} : \lambda,\mu\in\mathbb{R} \right\}$

zu $LH(M_2)$: z.B. $v_j = j\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, m

$\Rightarrow$ Linearkombi: $v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, j\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j j\\0\\0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

2) $V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{C}\}$ ist VR über $\mathbb{C}$

$e_j := (0,0,\dots,0,1,0,0,\dots)$

j-tes Folgenglied.

$LH(M) = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\cdot e_j : m\in\mathbb{N} \wedge \lambda_j\in\mathbb{C} \right\}$

$= (0,\dots,0,\lambda_j,0,0,\dots)$

$(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m,0,0,\dots)$

$\Rightarrow LH(M) = \{(a_n)$ Folge in $\mathbb{C} \mid \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N: a_n = 0\}$

$= \{$ all[illegible]n Folgen in $\mathbb{C}\}$

3) $V = \mathcal{P} = \{\text{Polynome in } \mathbb{C}\}$

$M := \{E_j : j \in \mathbb{N}_0\}$, $E_j : x \mapsto x^j$ (Monome)

Sei $P \in \mathcal{P}$, $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot x^j \Rightarrow P = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot E_j$

$\Rightarrow LH(M) = \mathcal{P}$

3.6 Minimale aufspannende Mengen:

Sei $M \subseteq V$ mit $LH(M) = V$. Dann sind äquivalent:

(i) $\forall m \in M : LH(M \setminus \{m\}) \neq V$

$\lambda \cdot (a_n) := (\lambda a_n)$

$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n)$

$2 \cdot e_2 - 4 \cdot e_5 = (0, 2, 0, 0, -4, 0, 0, \ldots)$

(ii) Für jede endliche Teilmenge $\{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq M$ gilt

$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot m_j = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 \right)$

(iii) Ist $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot m_j$ mit $m_1, \ldots, m_n \in M$, so sind die Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ eindeutig.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii). Zeige $\neg$(ii) $\Rightarrow$ $\neg$(i)

Sei $\{m_1, \dots, m_n\} \subseteq M$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit

$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot m_j = 0 \wedge$ mindest. ein $\lambda_{j_0} \neq 0$

$$\Rightarrow m_{j_0} = -\frac{1}{\lambda_{j_0}} \left(\lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_{j_0-1} m_{j_0-1} + \lambda_{j_0+1} m_{j_0+1} + \dots + \lambda_n m_n \right)$$

$\Rightarrow LH(M \setminus \{m_{j_0}\}) = LH(M)$

$\Rightarrow \neg$(i)

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot m_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j m_j$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \mu_j) \cdot m_j = 0$

$\overset{(ii)}{\Longrightarrow} \lambda_1 - \mu_1 = 0 \wedge \dots \wedge \lambda_n - \mu_n = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1 \wedge \lambda_2 = \mu_2 \wedge \dots \wedge \lambda_n = \mu_n$

Dies beweist (iii)

(iii) $\Rightarrow$ (i): Zeige $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(iii)

Sei $m_0 \in M$ und $LH(M \setminus \{m_0\}) = LH(M) = V$

$\Rightarrow m_0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot m_j$, mit $m_j \neq m_0$ (da $m_0 \in LH(M \setminus \{m_0\})$)

Aber es gilt auch $m_0 = 1 \cdot m_0$

$\Rightarrow \neg$(iii). $\square$

3.7 Def: Seien V, W VRe über demselben Körper $\mathbb{K}$. Eine Abb. $L: V \to W$ heißt *linear* oder

Vektorraum-Homomorphismus, falls

(i) $\left(\forall u, v \in V: L(u+v) = L(u) + L(v)\right)$

$\wedge\ \forall v \in V\ \forall \lambda \in \mathbb{K}: L(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot L(v)$

oder äquivalent

(ii) $\forall u, v \in V\ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}: L(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot L(u) + \mu \cdot L(v)$

Beispiele: 1) $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto 5x_1$

$$L\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \\ \lambda x_3 + \mu y_3 \end{pmatrix} = 5(\lambda x_1 + \mu y_1)$$

$$\lambda \cdot L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot L\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \lambda(5x_1) + \mu(5y_1) \longleftarrow =$$

$\overset{(ii)}{\Rightarrow} L$ ist linear

2) $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 \end{pmatrix}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ fest

$$L\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + a_2(\lambda x_2 + \mu y_2) \\ b_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + b_2(\lambda x_2 + \mu y_2) \end{pmatrix}$$

$=$

$$\lambda \cdot L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu \cdot L\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_1 y_1 + a_2 y_2 \\ b_1 y_1 + b_2 y_2 \end{pmatrix}$$

$\overset{(ii)}{\Rightarrow} L$ ist linear

3) $L: \mathcal{F} = \{f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}\} \to \mathbb{C}: f \mapsto f(1)$

$L(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda \cdot L(f) + \mu \cdot L(g) \overset{(ii)}{\Rightarrow} L$ lin

4) $L : P \to P : P \mapsto P'$ (Ableitung)

$L(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) = (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'$

$\overset{\text{Schulwissen}}{=} \lambda \cdot P' + \mu \cdot Q' = \lambda L(P) + \mu \cdot L(Q)$

5) $V = c := \{ (a_n) \text{ Folge in } \mathbb{C} : (a_n) \text{ ist konv.} \}$

$L((a_n)) := \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)$

$L(\lambda \cdot (a_n) + \mu \cdot (b_n)) = L((\lambda a_n + \mu b_n))$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) \overset{\text{Rechenregeln}}{\underset{\text{konv. Folgen}}{=}}$

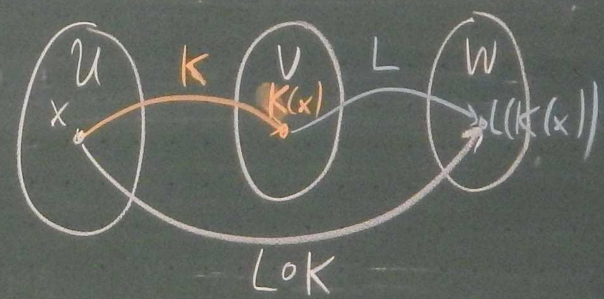
$= \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \mu \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(ii) $= \lambda \, L((a_n)) + \mu L((b_n))$

$\Rightarrow L$ ist linear.

$L^{-1}(0)$

38 Satz: U, V, W VRe über $\mathbb{K}$. Sind $K : U \to V$ und $L : V \to W$ linear, dann ist auch $L \circ K : U \to W$ linear.



Beweis: $L \circ K(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = L(K(\lambda \cdot u + \mu \cdot v))$

$\overset{K \text{ lin}}{=} L(\lambda \cdot K(u) + \mu \cdot K(v))$

$\overset{L \text{ lin}}{=} \lambda \cdot L(K(u)) + \mu \cdot L(K(v))$

$= \lambda \cdot (L \circ K)(u) + \mu ((L \circ K)(v))$ □

$\to \mathcal{P}_m : p \mapsto p'$

$\lambda \in \mathbb{R}\}$

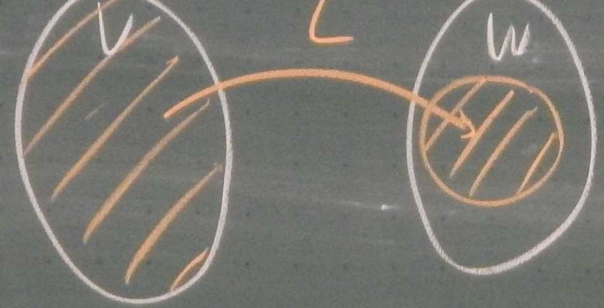
lin. Dann:

lich bijektiv,

linear.

Beweis: 1) $L(0) = L(\underset{\in K}{0} \cdot \underset{\in V}{0}) = 0\, L(0) = 0$

2)



Seien $w_1, w_2 \in \text{Bild}(L)$

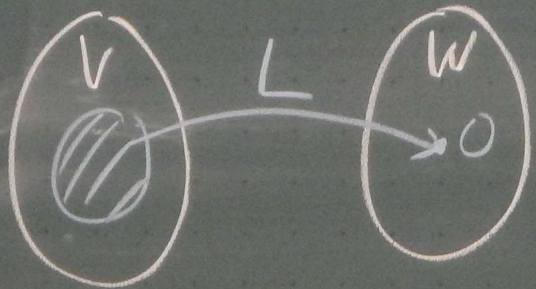
$\Rightarrow w_1 = L(v_1),\ w_2 = L(v_2)$

$\Rightarrow \lambda \cdot w_1 + \mu \cdot w_2 = \lambda \cdot L(v_1) + \mu \cdot L(v_2)$

$= L(\underbrace{\lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2}_{\in V}) \in \text{Bild}(L)$

$\overset{\text{UVR-Krit}}{\Longrightarrow}$ Bild(L) ist ein UVR

3)



Kern(L)

Seien $v_1, v_2 \in \text{Kern}(L)$

$\Rightarrow L(\lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2) = \underbrace{\lambda \cdot \underbrace{L(v_1)}_{=0} + \mu \cdot \underbrace{L(v_2)}_{=0}}_{=0}$

$\Rightarrow \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2 \in \text{Kern}(L)$

$\overset{\text{UVR-Kriterium (ii)}}{\Longrightarrow}$ Kern(L) ist UVR

$\mathbb{R}^2$