Übungsblatt 3

»Von allen, die bis jetzt nach Wahrheit forschten, haben die Mathematiker allein eine Anzahl Beweise finden können, woraus folgt, dass ihr Gegenstand der allerleichteste gewesen sein müsse.«

(Rene Descartes; 1596–1650)

*Die erste Aufgabe **S 3.1** ist schriftlich zu lösen. Ihre Lösungen geben Sie, versehen mit Ihrem Namen, in Ihrer nächsten Übungsgruppe (05.11.-07.11.) Ihrer Tutorin / Ihrem Tutor zur Korrektur ab.*

S 3.1. **(a)** Betrachten Sie auf der Menge M die angegebenen Relationen $\sim$. Entscheiden Sie, ob es sich bei **(i)**-**(iii)** um eine Äquivalenzrelation handelt und geben sie in diesem Fall die Äquivalenzklassen an.

(i) Sei $M = \mathbb{R}$ und die Relation $\sim$ gegeben durch $a \sim b \Leftrightarrow |a| = |b|$.

(ii) Sei $M = \mathbb{R}$ und die Relation $\sim$ gegeben durch $a \sim b \Leftrightarrow |a - b| < 1$.

(iii) Sei $M = \mathbb{Z}$ und für festes $t \in \mathbb{Z}$ die Relation $\sim_t$ gegeben durch

$$a \sim_t b \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z} \;:\; a - b = n \cdot t.$$

(b) Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die durch

$$M := \{(a_1, a_2) \in A \times A \;:\; f(a_1) = f(a_2)\}$$

definierte Relation eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie für $f = \cos$ und $A = B = \mathbb{R}$ die Äquivalenzklassen $[\pi]$ und $[\pi/2]$.

*Hinweis: Sie dürfen bei Aufgabenteil **(b)** Ihr Schulwissen über die Funktion* $\cos$ *nutzen.*

V 3.2. Sei $A = \{a, b\}$ eine Menge mit genau zwei Elementen $a \neq b$.

(a) Geben Sie alle möglichen (zweistelligen) Ordnungsrelationen auf $A \times A$ als Mengen von Paaren an.

(b) Geben Sie alle möglichen (zweistelligen) Äquivalenzrelationen auf $A \times A$ als Mengen von Paaren an.

V 3.3. Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ gegeben durch $A \sim B :\Leftrightarrow A \subseteq B$ eine Ordnungsrelation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ der reellen Zahlen ist.

V 3.4. **(a)** Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

V 3.5. Sei $p \in \mathbb{N}$ fest. Beweisen Sie induktiv, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $(2p-1)^n - 1$ gerade ist.

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de