

Übungsblatt 4

»Man lernt Mathematik nicht, man gewöhnt sich nur daran.«

(Paul Erdős; 1913–1996)

Bei Aufgabe **Z 4.5** handelt es sich um eine Zusatzaufgabe. Ihre Bearbeitung ist freiwillig (und dient in diesem Falle der Routine beim Umrechnen der Zahlensysteme); sie kann dennoch votiert und – sofern genug Zeit vorhanden ist – auch vorgerechnet werden.

V 4.1. Stellen Sie eine Vermutung auf, für welche $n \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung gilt und beweisen Sie diese induktiv:

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

V 4.2. (a) Berechnen Sie die Werte

$$(i) \text{ggT}(90, 24), \quad (ii) \text{ggT}(134, 52), \quad (iii) g := \text{ggT}(11760, 8932).$$

(b) Stellen Sie g als Linearkombination der beiden Zahlen 11760 und 8932 dar.

(c) Freiwillig: Schreiben Sie Pseudocode zur Bestimmung des $\text{ggT}(m, n)$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ auf. Hierbei sei das Modulo-Rechnen $x \equiv m \pmod n$ bereits vorimplementiert.

V 4.3. (a) Berechnen Sie

$$(i) 23 + 6 \pmod 3, \quad (ii) 314 \cdot 962 \pmod 3, \quad (iii) -42 \pmod 2.$$

(b) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$

$$(i) [33] \cdot [31], \quad (ii) [321] + [9665], \quad (iii) \frac{[224]}{[31]}.$$

Hinweis: Machen Sie sich vor der Bearbeitung der Aufgabe den Unterschied zwischen $=$ und \equiv klar und achten Sie auf die korrekte Verwendung beider Relationen.

V 4.4. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Die Mengen $G := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ und \mathbb{N} sind gleichmächtig.

(b) Die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} ist abzählbar unendlich.

(c) Für beliebige reelle Zahlen $a < b$ und $c < d$ sind die offenen Intervalle (a, b) und (c, d) gleichmächtig.

(d) Die beiden Mengen $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$ und \mathbb{R} sind gleichmächtig.

Hinweise zu (c) und (d): Sollten Sie benötigen, dass die Komposition bijektiver Funktionen wieder bijektiv ist, so darf dies ohne Beweis verwendet werden. Ferner dürfen Sie aus der Schule bekannte Eigenschaften elementarer Funktionen verwenden.

Z 4.5. (a) Berechnen Sie in der Ziffernbasis 10

(i) 11_2 , (ii) 1010101_2 , (iii) 1010101_3 .

(b) Berechnen Sie in der Ziffernbasis 10

(i) 15_{16} , (ii) AB_{16} , (iii) $5CF_{16}$.

(c) Berechnen Sie in der Ziffernbasis 9

(i) 1010101_2 , (ii) 11_8 , (iii) $001A_{16}$.