Übungsblatt 6

»Die Mathematik ist mehr ein Tun als eine Lehre.«

(L. E. J. Brouwer; 1881 – 1966)

Allgemeiner Hinweis zu Folgen: *Beachten Sie stets den Unterschied zwischen der Folge $(x_n) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst und ihren Folgengliedern x_n. Während die Folge (x_n) in $\mathbb{K}$ eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{K}$ ist, gilt $x_n \in \mathbb{K}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Menge der Folgenglieder bezeichnet man üblicherweise mit $\{x_1, x_2, \dots\} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$, auch wenn in der Praxis häufig die (formal anfechtbare) Schreibweise $(x_n) \subseteq \mathbb{K}$ verwendet wird.*

S 6.1. Abgabe am 26.-28. November

(a) Zeigen Sie ausgehend von den Definitionen, dass jede konvergente Folge (x_n) reeller Zahlen beschränkt ist.

(b) Seien $(x_n), (y_n)$ und (z_n) reelle Zahlenfolgen, so dass (x_n) beschränkt und (y_n) eine gegen $y = 0$ konvergente Folge ist, sowie (z_n)

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N_0 \quad : \quad |z_n| \leq x_n y_n$$

erfüllt. Beweisen Sie ausgehend von der Definition, dass (z_n) ebenfalls gegen Null konvergiert; geben Sie dazu das N_ε an, so dass $|z_n - 0| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$.

V 6.2. Betrachten Sie die Folge (x_n) mit Folgengliedern $x_n = \frac{n^2}{2n^2+20n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Seien $\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = 10^{-3}$ und $\varepsilon_3 = 10^{-6}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie $N_{\varepsilon_i} \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\, n > N_{\varepsilon_i} \qquad \left| x_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon_i$$

für $i = 1, 2, 3$.

(b) Beweisen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

V 6.3. (a) Seien $(x_n), (y_n)$ und (z_n) reelle Zahlenfolgen und sei $N_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

für alle $n \geq N_0$ gilt. Angenommen es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} z_n = x.$$

Zeigen Sie mithilfe der Definition der Konvergenz, dass dann auch (y_n) gegen x konvergiert.

(b) Benutzen Sie Teilaufgabe **(a)**, um zu zeigen, dass

$$y_n := \frac{1}{2n^{11} + 3} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Bitte wenden.

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de   robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de

V 6.4. Benutzen Sie das Verdichtungsprinzip, um zu beweisen, dass die Folge (x_n) gegeben durch die *Partialsummen*

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

divergiert.

Hinweis: *Wählen Sie z.B. $n = 2m$, d.h. schätzen Sie $|x_{2m} - x_m|$ nach unten ab. Wieso ist das ausreichend, um die Kontraposition des Verdichtungsprinzips nachzuweisen?*

V 6.5. Untersuchen Sie die von $x \in \mathbb{R}$ abhängige Menge

$$M_x := \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$$

auf die Existenz von Infimum, Minimum, Supremum und Maximum und geben Sie diese jeweils, im Falle ihrer Existenz, an. Dabei sollen exemplarisch die fünf Fälle

(a) $x = 3$, **(b)** $x = 1$, **(c)** $x = \frac{1}{2}$,

(d) $x = -1$, **(e)** $x = -3$

behandelt werden.

Hinweis: *Zeigen Sie in Teilaufgabe* ***(a)****, dass die Folge (x_n) mit $x_n := x^n$ unbeschränkt nach oben ist – mit anderen Worten: Zeigen Sie, dass für alle $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x^n \geq K$.*

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de