Übungsblatt 8

»Man muss viel gelernt haben, um nach dem, was man nicht weiß, fragen zu können.«

(Jean-Jacques Rousseau; 1712 – 1778)

S 8.1. Gegeben seien die komplexen Zahlen $u = -1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ und $v = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. Wie in der Vorlesung bezeichnen wir die Darstellung $z = x + \mathrm{i}y$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ als *Normalform* und die Darstellung $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ (mit $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$) als *Polarform*.

(a) Bestimmen Sie $|u|$ und $|v|$ sowie $\arg(u)$ und $\arg(v)$. Stellen Sie u in Polarform und v in Normalform dar.

(b) Berechnen Sie uv und $\frac{u}{v}$ sowohl in Normal-, als auch in Polarform. Skizzieren Sie u, v und die beiden Ergebnisse in eine gemeinsame komplexe Zahlenebene.

(c) Bestimmen Sie explizit alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $z^5 = 32\mathrm{i}$ und zeichnen Sie diese in eine neue komplexe Zahlenebene.

V 8.2. Zerlegen Sie die folgenden Polynome $P_a, P_b, P_c \in \mathbb{C}[x]$ mit

(a) $P_a(z) = 2z^2 + \mathrm{i}z + 6$, **(b)** $P_b(z) = z^4 + 5z^2 + 4$, **(c)** $P_c(z) = z^3 - z^2 + z - 1$

jeweils

(i) in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$ (d.h. in Polynome vom Grad $n = 1$ mit komplexen Koeffizienten),

(ii) wenn möglich als Faktorisierung über $\mathbb{R}$ (d.h. in Polynome vom Grad $n \leq 2$ mit reellen Koeffizienten).

V 8.3. Zum Polynom $P \in \mathbb{C}[x]$ mit

$$P(z) = z^6 - 4z^5 + 7z^4 - 8z^3 + 6z^2 - 4z$$

sei eine Nullstelle $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ gegeben. Bestimmen Sie alle restlichen Nullstellen von P und geben Sie die Lösungsmenge L an.

V 8.4. Finden Sie alle rationalen Nullstellen $q_1, \ldots, q_4 \in \mathbb{Q}$ des ganzzahligen Polynoms $Q \in \mathbb{R}[x]$ mit

$$Q(x) = -6x^4 - x^3 + 25x^2 + 4x - 4$$

durch Anwendung von Satz 2.73.

V 8.5. Wir versehen den $\mathbb{R}^3$ mit der üblichen (Vektor-)Addition und skalaren Multiplikation und betrachten somit $V := \mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum (d.h. als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$). Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen

(a) $U_1 = \{(x, y, z) \in V \ : \ x = 1\}$,

(b) $U_2 = \{(x, y, z) \in V \ : \ x < y\}$,

(c) $U_3 = \{(x, y, z) \in V \ : \ x = y = z\}$,

(d) $U_4 = \{(x, y, z) \in V \ : \ x + y = 1\}$,

(e) $U_5 = \{(x, y, z) \in V \ : \ x^2 - y^2 = 0\}$,

(f) $U_6 = \{(x, y, z) \in V \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$,

(g) $U_7 = \{(x, y, z) \in V \ : \ x + y = 0\}$

Untervektorräume von V sind.

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de