Übungsblatt 9

»Die Algebra ist großzügig - oft gibt sie mehr, als wonach man gefragt hat.«

(Jean-Baptiste le Rond d'Alembert; 1717 – 1783)

9.0 Besprechung der schriftlichen Aufgabe 8.1. und Durchführung des Kurztests K-2.

V 9.1. Sei V die Menge aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, versehen mit der Addition

$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n) \qquad \text{für alle } (a_n), (b_n) \in V$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda \cdot (a_n) := (\lambda \cdot a_n) \qquad \text{für alle } (a_n) \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a)* Zeigen Sie, dass V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.
** Diese Aufgabe wird aus Zeitgründen nicht besprochen.*

(b) Untersuchen und begründen Sie, ob die folgenden Mengen

(i) $U_1 = \{(a_n) \in V \mid (a_n) \text{ ist konvergent}\}$,
(ii) $U_2 = \{(a_n) \in V \mid (a_n) \text{ ist monoton wachsend}\}$,
(iii) $U_3 = \{(a_n) \in V \mid (a_n) \text{ ist beschränkt}\}$,
(iv) $U_4 = \{(a_n) \in V \mid \exists\, N_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n > N_0 \ :\ a_n = 0\}$

Untervektorräume von V sind. Welcher der U_i, $i = 1, 2, 3, 4$, ist weiterhin ein Untervektorraum, wenn man V als Vektorraum über $\mathbb{C}$ betrachtet?

V 9.2. Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Zeichnen Sie die durch

(a) $x = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad -2 \le \mu < \infty,$

(b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad -1 \le \mu, \lambda \le 1,$

(c) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -1 \le \mu, \lambda \le 1,$

gegebenen Punktmengen in ein jeweils geeignetes x_1-x_2-Koordinatensystem.

Bitte wenden.

V 9.3. Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorraum-Homomorphismus (d.h. eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung – stimmen, wie hier, Definitions- und Bildbereich des Homomorphismus überein, so nennt man ihn *Endomorphismus*).

(a) Rekonstruieren Sie die Abbildungsvorschrift $A : x \mapsto Ax = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ zu beliebigem $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ aus den angegebenen Bildern von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ unter dem Endomorphismus A.

(i) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, **(ii)** $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(iii) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(b) Bestimmen Sie jeweils Kern(A) und Bild(A).

(c) Skizzieren Sie das Bild des Einheitsquadrates $[0,1] \times [0,1] \in \mathbb{R}^2$ unter A aus **(i)-(iii)** in je ein y_1-y_2-Koordinatensystem.

V 9.4. Seien $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ und sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Verfahrens alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme **(a-c)** und geben Sie jeweils die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{R}$ an. Freiwillig: Lösen Sie das LGS in Teilaufgabe **(d)**. Existiert eine eindeutige Lösung?

(a)
$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 19 \\ 7x_1 & + & 10x_2 & = & 5 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 6 \\ 7x_1 & + & 8x_2 & & & = & -9 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4t-2 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcrcr} (1+2\mathrm{i})x_1 & + & (2+\mathrm{i})x_2 & = & 1+4\mathrm{i} \\ (4-2\mathrm{i})x_1 & + & (2-4\mathrm{i})x_2 & = & 8-2\mathrm{i} \end{array}$$