Übungsblatt 11

»Ein Problem ist halb gelöst, wenn es klar formuliert ist.«

(John Dewey; 1859 – 1952)

V 11.0. Besprechung der schriftlichen Aufgabe 10.1 und Durchführung des Kurztests K-3.

V 11.1. Seien $\mathcal{E}_2 = \{e_1, e_2\}$ und $\mathcal{E}_3 = \{e_1', e_2', e_3'\}$ die kanonischen Basen der $\mathbb{R}$-Vektorräume $V := \mathbb{R}^2$ und $W := \mathbb{R}^3$. Seien weiter $B_2 := \{b_1, b_2\} \subseteq V$ und $C_3 := \{c_1, c_2, c_3\} \subseteq W$ Teilmengen mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_2}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_2}; \qquad c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_3}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_3}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}_3}.$$

(a) Zeigen Sie, dass B_2 eine Basis von V und C_3 eine Basis von W ist.

(b) Seien Id_V bzw. Id_W die Identitätsabbildungen auf V bzw. W. Bestimmen Sie:

(i) $M_{\mathrm{Id}_V}^{\mathcal{E}_2, B_2}$ **(ii)** $M_{\mathrm{Id}_V}^{B_2, \mathcal{E}_2}$ **(iii)** $M_{\mathrm{Id}_W}^{\mathcal{E}_3, C_3}$ **(iv)** $M_{\mathrm{Id}_W}^{C_3, \mathcal{E}_3}$

(c) Sei die lineare Abbildung $A : V \to W$ in den den kanonischen Basen gegeben durch

$$M_A^{\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $M_A^{B_2, C_3}$; also diejenige Matrix, welche die selbe lineare Abbildung A bezüglich der Basen C_3 und B_2 beschreibt.

V 11.2. Betrachten Sie die 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie A^2, A^3 und A^4.

(b) Geben Sie die Matrix $A_n := A^n$ an und beweisen Sie Ihre Vermutung für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Setzen Sie in Ihrer Formel für A_n die Zahlen $n = -1$ bzw. $n = 0$ ein und berechnen Sie $A_{-1} \cdot A$ sowie $A \cdot A_{-1}$. Was ist A_{-1}, was ist A_0?

V 11.3. Wir betrachten die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 2z + 3w \\ 2x + 4y - 3z + 4w \\ 5x + 10y - 8z + 11w \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie alle Lösungen v des linearen Gleichungssystems $Av = b$ mit

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} A$ und geben Sie zwei verschiedene Basen für diesen an.

(c) Bestimmen Sie $\dim \operatorname{Bild} A$ und geben Sie eine Basis von $\operatorname{Bild} A$ an. Geben Sie einen Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ an mit $u \notin \operatorname{Bild} A$.

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de