# Übungsblatt 12

*»Der Mathematiker ist ein Hersteller von Schemata.«*

(Godfrey Harold Hardy; 1877 – 1947)

***Erinnerung: Die zweite Scheinklausur findet am Samstag, den 26. Januar 2019 ab 11:30 Uhr statt. Genauere Informationen zu den Raumeinteilungen finden Sie zu gegebener Zeit auf der Vorlesungsseite.***
***Ferner können Sie in Campus unter »Prüfungsergebnisse« die von Ihnen erreichten Votierpunkte einsehen. Bis inklusive Blatt 12 waren (ohne Zusatzaufgaben) 52 Votierpunkte möglich.***

**V 12.1.** Seien $A$ eine reelle $n \times n$-Matrix und $B, C$ je reelle $n \times m$-Matrizen für feste $n, m \in \mathbb{N}$.

**(a)** Sei $A$ invertierbar. Beweisen Sie: Aus

$$A \cdot B = A \cdot C \tag{$*$}$$

folgt $B = C$.

**(b)** Rechnen Sie nach, dass für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Gleichung $(*)$ gilt. Was lässt sich für $A$ folgern?

**V 12.2.** Entscheiden und begründen Sie, ob folgende Matrizen invertierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Inversen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 4 & -5 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -5 & 12 & 12 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

*Hinweis: Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse: Haben Sie zu einer invertierbaren Matrix $M$ ihre vermeindliche Inverse $M^{-1}$ ausgerechnet, so können Sie durch Nachrechnen die Probe machen, ob auch tatsächlich $M \cdot M^{-1} = E$ gilt (gilt dann sofort auch $M^{-1} \cdot M = E$?). Ist dies nicht der Fall, so impliziert dies einen Fehler in Ihrer Rechnung.*

**Bitte wenden.**

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de

**V 12.3.** Sei $V := \mathbb{R}^4$ der euklidische $\mathbb{R}$-Vektorraum versehen mit dem (aus der Schule bekannten) Standard-Skalarprodukt

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle \;:\; V \times V \to \mathbb{R} \;:\; \langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^{4} u_k v_k$$

und der dadurch *induzierten* euklidischen Norm

$$\|v\|_2 := \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

für $u = (u_1, \ldots, u_4) \in V$ und $v = (v_1, \ldots, v_4) \in V$. Seien $x, y, z \in V$ gegeben durch

$$x = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ \sqrt{23} \\ 9 \end{pmatrix}.$$

.

**(a)** Bestimmen Sie $\|x\|_2, \|y\|_2, \|z\|_2$, sowie $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle$ und $\langle x, z\rangle$. Welche der Vektoren sind orthogonal zueinander, welche nicht?

**(b)** Verifizieren Sie (durch Nachrechnen) für die beiden orthogonalen Vektoren den Satz des Pythagoras aus Kapitel 3.9.

**V 12.4.** **(a)** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, sowie $\|\cdot\|$ die davon *induzierte* Norm, d.h.

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ die *Parallelogrammgleichung* erfüllt, d.h. es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

**(b)** Sei nun $n = 2$. Nutzen Sie **(a)** um zu zeigen, dass die Norm $\|\cdot\|_1$, gegeben durch $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, nicht von einem Skalarprodukt induziert wird.

**V 12.5.** Betrachte zu $n \in \mathbb{N}$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathbb{R}^n$ und zu $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V$ die beiden Abbildungen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ gegeben durch

$$\|v\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |v_k| \qquad \text{und} \qquad \|v\|_\infty := \max_{1 \le k \le n} |v_k|. \tag{$*$}$$

**(a)** Zeigen Sie, dass sowohl $\|\cdot\|_1$ als auch $\|\cdot\|_\infty$ Normen auf $V$ definieren.

**(b)** Zwei Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ auf einem Vektorraum $V$ heißen *äquivalent*, falls

$$\exists\, c > 0, C > 0 \quad \forall\, x \in V \quad : \quad c\|x\|_A \le \|x\|_B \le C\|x\|_A$$

gilt. Zeigen Sie, dass die beiden Normen aus $(*)$ auf $V = \mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de    robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de