Übungsblatt 13

»Die Mathematiker, die nur Mathematiker sind, denken also richtig, aber nur unter der Voraussetzung, dass man ihnen alle Dinge durch Definitionen und Prinzipien erklärt; sonst sind sie beschränkt und unerträglich, denn sie denken nur dann richtig, wenn es um sehr klare Prinzipien geht.«

(Blaise Pascal; 1623 – 1663)

V 13.1. Betrachten Sie die die Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ reeller 3×3-Matrizen mit

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ferner definieren wir den *Kommutator* $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ zweier Matrizen A und B durch $[A, B] := A \cdot B - B \cdot A$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist bezüglich des Matrizenprodukts, d.h. es gilt

$$A, B \in \mathcal{M} \ \Rightarrow A \cdot B \in \mathcal{M}.$$

(b) Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \mathcal{M}$ invertierbar ist und geben Sie A^{-1} explizit an. Ist auch $A^{-1} \in \mathcal{M}$?

(c) Für welche Matrizen $A, B \in \mathcal{M}$ gilt $[A, B] = 0$?

(d) Für welche Matrizen $A \in \mathcal{M}$ gilt $[A, B] = 0 \ \ \forall\, B \in \mathcal{M}$?

V 13.2. Gegeben sei die linear unabhängige Menge $M := \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nutzen Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis B von $\mathrm{LH}(M) \subseteq \mathbb{R}^4$ zu konstruieren. Es soll hierbei bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ normalisiert werden.

Bitte wenden.

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de   robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de

V 13.3. Gegeben Sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$, sowie Untervektorräume $U \subseteq V$ und Vektoren $x \in V$,

(i) $U = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

(ii) $U = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ : \ s, t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

sowie jeweils die kanonische Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ zu V. Bestimmen Sie für (i) und (ii) jeweils

(a) eine ONB (Orthonormalbasis) B_U von U,

(b) die orthogonale Projektion von x auf U,

(c) den Abstand von x zu U,

(d) diejenige Matrix $M_P^{B,B}$, die zur orthogonalen Projektion $P : V \to U$ gehört,

(e) diejenige Matrix $M_P^{B_U,B}$, die zur orthogonalen Projektion $P : V \to U$ gehört, wobei B_U die in Teilaufgabe (a) bestimmte ONB ist.

V 13.4. Sei V ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ und der dadurch induzierten Norm $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}_0^+$, d.h.

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}, \qquad v \in V.$$

Sei weiter $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Vektoren $v_n \in V$, die bezüglich $\| \cdot \|$ gegen einen Vektor $v \in V$ konvergiert, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\varepsilon \quad : \quad \|v_n - v\| < \varepsilon.$$

Beweisen Sie, dass für alle $w \in V$

$$\lim_{n\to\infty} \langle v_n, w \rangle = \langle v, w \rangle$$

gilt.

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de