Übungsblatt 14

»Fear is the true enemy, the only enemy.«

(孙子 [Sun Tzu oder Sunzi]; etwa 400 v. Chr.)

V 14.1. Seien $n, m, l \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen, $\alpha \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl sowie

$$A = (a_{i,j}) = (a_{i,j})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m} \in \mathbb{C}^{n\times m} \qquad \text{bzw.} \qquad B = (b_{i,j}) = (b_{i,j})_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,l} \in \mathbb{C}^{m\times l}$$

komplexe $n \times m$- bzw. $m \times l$-Matrizen. Zur Erinnerung: Es gilt $A^* = (a^*_{i,j}) = (\overline{a_{j,i}})$. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln.

(a) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$; **(b)** $(A^*)^* = A$; **(c)** $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$;

(d) ist $n = m$ und A invertierbar, so ist auch A^* invertierbar und es gilt $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

V 14.2. Betrachten Sie die zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} & 0 \\ 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 2 & 0 \\ 2 & 2+\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$$

gehörenden, linearen Abbildungen $L_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 : x \mapsto Ax$ und $L_B : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2 : x \mapsto Bx$.

(a) Bestimmen Sie die adjungierten Abbildungen $(L_A)^*$ und $(L_B)^*$.

(b) Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir auf $\mathbb{C}^n$ das Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{\mathbb{C}^n} := u^* \cdot v.$$

Dabei ist u^* der adjungierte (Zeilen-)Vektor zu $u \in \mathbb{C}^n$.
Sei $x = (1, \mathrm{i}, 2)^T \in \mathbb{C}^3$ und $y = (\mathrm{i}, 2)^T \in \mathbb{C}^2$. Berechnen Sie jeweils

(i) $\langle L_A x, x\rangle_{\mathbb{C}^3}$ und $\langle x, (L_A)^* x\rangle_{\mathbb{C}^3}$ sowie **(ii)** $\langle L_B x, y\rangle_{\mathbb{C}^2}$ und $\langle x, (L_B)^* y\rangle_{\mathbb{C}^3}$

und verifizieren Sie damit Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil **(a)**.

(c) Ist L_A symmetrisch, selbstadjungiert, normal, unitär? Wie ist es bei L_B?

V 14.3. Sei $(\alpha, \beta)^T \in \mathbb{R}^2$ und sei $L_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die zur Matrix $A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ gehörende lineare Abbildung. Weisen Sie nach, dass $L_{\alpha,\beta}$ eine der Eigenschaften **(ii)** oder **(iii)** aus **3.83** erfüllt, um folgende Aussage zu beweisen: Liegt der Punkt $(\alpha, \beta)^T$ auf dem Einheitskreis, i.e. $\|(\alpha, \beta)\|_2 = 1$, so ist $L_{\alpha,\beta}$ orthogonal (d.h. unitär über $\mathbb{R}$).

V 14.4. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & -2-2\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie **ausschließlich** die in Definition **3.87** und Satz **3.89** beschriebenen Eigenschaften, um die Determinanten obiger Matrizen zu berechnen.

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de