Vektorraum V über $\mathbb{K}$:

Addition $v_1 + v_2 \in V$

(Vektor Plus Vektor ergibt Vektor)

Skalare Multiplikation: $\lambda \cdot v \in V$ für $\lambda \in \mathbb{K}$

(Zahl Mal Vektor ergibt Vektor)

$(V, +)$ abelsche Gruppe und

(S1)–(S4) müssen erfüllt sein.

Wichtigstes Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$$

Basis: Eine Teilmenge $B \subseteq V$, für die gelten:

1) B ist linear unabhängig und
2) $\mathrm{LH}(B) = V$

Oft einfacher:

Jeder Vektor $v \in V$ besitzt eine Darstellung

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot b_j \quad \text{mit } b_j \in B$$

mit eindeutigen Koeffizienten λ_j.

Für $V = \mathbb{R}^3$:

Kanonische Basis $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ mit

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

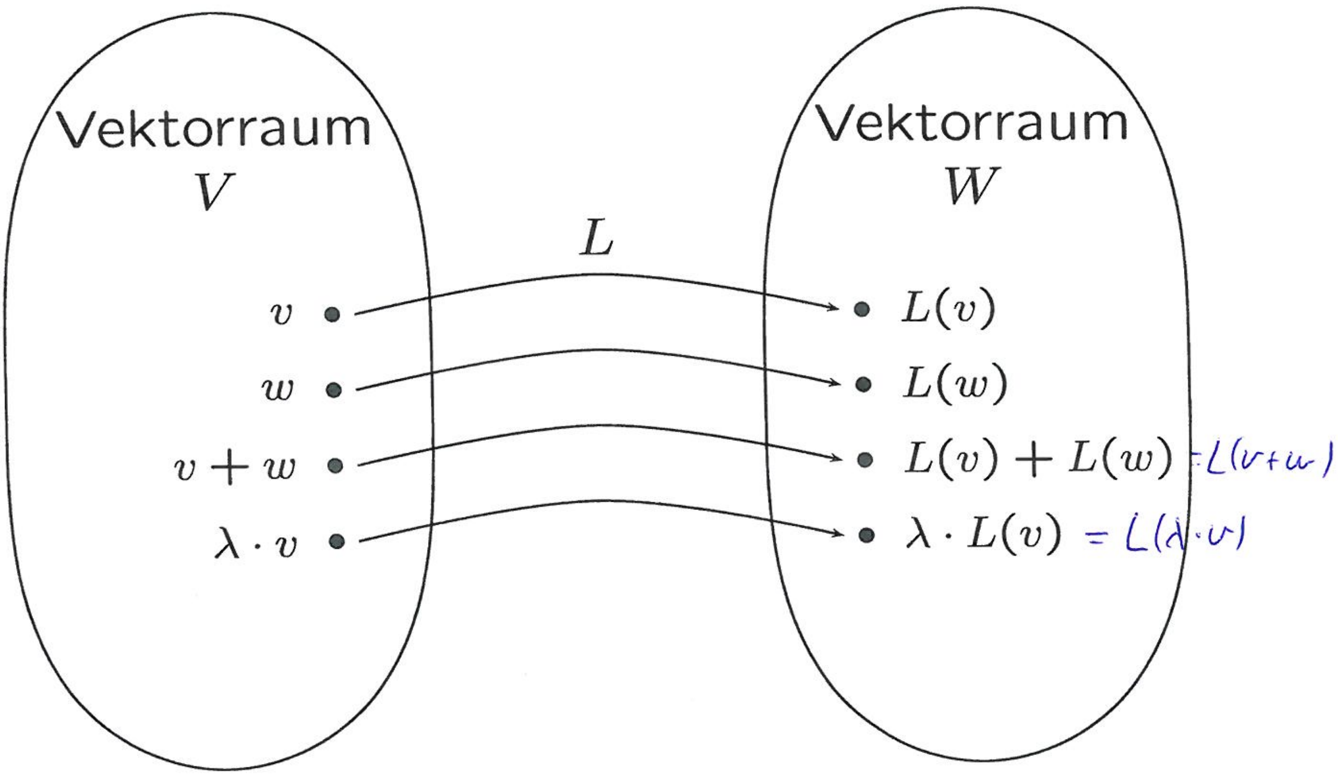
$$= x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3, \quad x_1, x_2, x_3 \text{ eindeutig}$$

Die Basis hat 3 Elemente $\Rightarrow$ $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

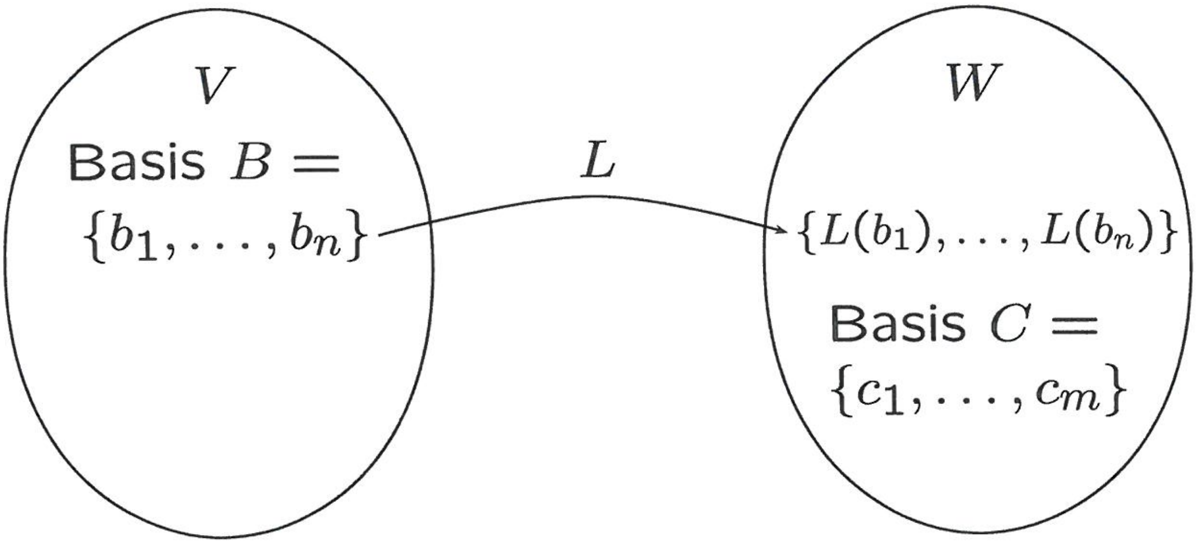
Lineare Abbildung:

Ist eine Abbildung $L : V \to W$, wobei V und W Vektorräume sind und

$$L(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot L(u) + \mu \cdot L(v).$$



Matrix einer linearen Abbildung:



$$L(b_1) = \lambda_1 \cdot c_1 + \ldots + \lambda_m \cdot c_m : \quad L(b_1)_C = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$L(b_2) = \mu_1 \cdot c_1 + \ldots + \mu_m \cdot c_m : \quad L(b_2)_C = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

Schreibe

$$M_L^{C,B} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \cdots \\ \lambda_2 & \mu_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ \lambda_m & \mu_m & \cdots \end{pmatrix}}_{n = \dim(V) : \text{ Anzahl der Spalten}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}}\right\} m = \dim(W) \text{ Anzahl der Zeilen}$$