Erste Scheinklausur

- Es gibt 11 Aufgaben. Aufgabe **Z 11** ist eine (freiwillige) Zusatzaufgabe. Die jeweilige Punktzahl steht in Klammern hinter der Aufgabennummer.
- Die Maximalpunktzahl ist somit 34+1.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Eigenes Papier darf lediglich als Konzeptpapier verwendet aber nicht mit abgegeben werden.
- In den Aufgaben **A 6.c)**, **A 7.b)** und **A 8.** sind alle Schritte zu begründen. Dabei dürfen Aussagen, die in der Vorlesung oder den Übungen bereits gezeigt wurden, verwendet werden, sofern diese nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Aufgabe **A 8.** lösen Sie bitte auf der Innenseite des Umschlagbogens.
- Bei Aufgabe **A 10.** ergeben korrekte Kreuze $+0.5$, falsche Kreuze -0.5 und nicht gesetzte Kreuze 0 Punkte. Negative Punkte werden nicht über die Aufgabe hinaus übertragen.
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- Füllen Sie bitte zunächst die folgenden vier Kästchen korrekt aus.
- Legen Sie am Schluss die von Ihnen ausgefüllten, zusammengehefteten Aufgabenblätter in den Umschlagbogen.
- Viel Erfolg!

Nachname, Vorname	Gruppennummer
Matrikelnummer	Vorname des Tutors

Korrektur:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		Σ

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de

A 1. [2 Punkte] Ergänzen Sie die fehlenden Einträge in der Wahrheitstabelle. Dabei ist $\sqcap$ definiert als

$$A \sqcap B \quad \Leftrightarrow \quad \neg(A \vee B).$$

A	B	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$	$A \sqcap B$
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

A 2. [1 Punkt] Negieren Sie die folgende Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R}, y > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N} \quad : \quad \frac{1}{y} + z^2 > x^2.$$

Negation

A 3. [4 Punkte] Geben Sie (ohne Beweis) je ein Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$ an, die

(a) injektiv, aber nicht surjektiv

$f(n) =$

(b) surjektiv, aber nicht injektiv

$f(n) =$

(c) weder surjektiv noch injektiv

$f(n) =$

(d) bijektiv

$f(n) =$

ist.

A 4. [3 Punkte] Gegeben seien die beiden Abbildungen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 1,$$
$$f_2 : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{2\} : x \mapsto \frac{2x-3}{x-1}.$$

(a) Geben Sie die Komposition $f_1 \circ f_2$ und ihren Definitionsbereich an.

$(f_1 \circ f_2)(x) =$

$D(f_1 \circ f_2) =$

.

(b) Geben Sie die inverse Abbildung f_2^{-1} und ihren Definitionsbereich an.

$f_2^{-1}(y) =$

$D(f_2^{-1}) =$

A 5. [2 Punkte] Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Wie lautet die Definition von $\mathrm{ggT}(m, n)$?

Definition
$\mathrm{ggT}(m, n) :=$

(b) Benutzen Sie den euklidischen Algorithmus, um $\mathrm{ggT}(832, 752)$ zu berechnen.

Euklidischer Algorithmus **und** Ergebnis

$\Rightarrow$ ggT$(832, 752) =$

A 6. [5 Punkte]

(a) Geben Sie die Definition dafür an, dass eine reelle Zahlenfolge (x_n) gegen einen Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Definition Konvergenz

(b) Geben Sie die Definition dafür an, dass eine reelle Zahlenfolge (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

Definition Cauchy-Folge

(c) Beweisen Sie ausgehend von der Definition der Konvergenz, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $x_n = \frac{1+n^2}{n^2}$, gegen $x = 1$ konvergiert.

Konvergenz von (x_n)

A 7. [4 Punkte]

(a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Geben Sie alle notwendigen Eigenschaften an, welche eine Funktion $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_0^+$ erfüllen muss, damit $(\mathbb{K}, +, \cdot, |\cdot|)$ ein bewerteter Körper ist.

Notwendige Eigenschaften

(b) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$.

Beweis

A 8. [4 Punkte] Lösen Sie diese Aufgabe auf der Innenseite des Umschlagbogens!
Zeigen Sie induktiv: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{4^{2n} - 3^n}{13} \in \mathbb{N}.$$

A 9. [3 Punkte] Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen ein Supremum, Infimum, Maximum oder Minimum besitzen. Tragen Sie im Falle ihrer Existenz die entsprechenden Werte bzw. ein N für »nicht existent« ein.

Menge	$\sup M$	$\inf M$	$\max M$	$\min M$
$M = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$				
$M = \{2^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$				
$M =]-\infty, -5] \cup [1, 3[$				

A 10. **[$12 \cdot 0.5 = 6$ Punkte]** In dieser Aufgabe sind keinerlei Begründungen gefordert. Es gilt der Bewertungsmaßstab der Kurztests.

(a) Für Mengen A, B, C gilt $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. ... wahr ☐ falsch ☐

(b) Es existiert eine Relation, die sowohl Ordnungs- als auch Äquivalenzrelation ist. ... wahr ☐ falsch ☐

(d) Auf $\mathbb{Q}$ ist $a \sim b :\Leftrightarrow a \neq b$ eine Äquivalenzrelation. ... wahr ☐ falsch ☐

(c) Es gilt $1111_2 = 33_4$. ... wahr ☐ falsch ☐

(d) $(\mathbb{N}, +)$ ist ein Monoid. ... wahr ☐ falsch ☐

(e) $(\mathbb{N}, \cdot)$ ist ein Monoid. ... wahr ☐ falsch ☐

(f) $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Körper. ... wahr ☐ falsch ☐

(g) Es existieren reelle Folgen, die sowohl beschränkt als auch divergent sind. ... wahr ☐ falsch ☐

(h) Sei (x_n) konvergent in $\mathbb{R}$ und sei $y \in \mathbb{R}$ fest. Gilt $x_n < y$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < y$. ... wahr ☐ falsch ☐

(i) Jede reelle Cauchy-Folge ist beschränkt. ... wahr ☐ falsch ☐

(j) Es existiert eine Folge (x_n) in $\mathbb{Q}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \mathrm{e} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. ... wahr ☐ falsch ☐

(k) Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist konvergent. ... wahr ☐ falsch ☐

Z 11. **Zusatzaufgabe [1 Punkt]** Sei $p \in \mathbb{N}$ eine feste Primzahl. Betrachte $\mathrm{ggT} : (p, \cdot) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ als Abbildung in $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie (ohne Beweis) das Bild $\mathrm{ggT}(p, \mathbb{N})$ von $\mathrm{ggT}(p, \cdot)$ an.

$\mathrm{ggT}(p, \mathbb{N}) =$

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de