Zweite Scheinklausur

- Es gibt 11 Aufgaben. Aufgabe **Z 11.** ist eine (freiwillige) Zusatzaufgabe. Die jeweilige Punktzahl steht in Klammern hinter der Aufgabennummer.
- Die Maximalpunktzahl beträgt somit $46 + 1 = 47$ Punkte.
- Zum Bestehen sind **in Summe beider Scheinklausuren** 36 von $34 + 46 = 80$ Punkten (ohne Zusatzaufgaben) hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Eigenes Papier darf lediglich als Konzeptpapier verwendet aber **nicht** mit abgegeben werden.
- In Aufgabe **A 7.** sind alle Schritte zu begründen. Dabei dürfen Aussagen, die in der Vorlesung oder den Übungen bereits gezeigt wurden, verwendet werden, sofern diese nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Aufgabe **A 7.** lösen Sie bitte auf Seite 9 der Klausur.
- Bei Aufgabe **A 10.** ergeben korrekte Kreuze $+0.5$, falsche Kreuze -0.5 und nicht gesetzte Kreuze 0 Punkte. Negative Punkte werden nicht über die Aufgabe hinaus übertragen.
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- Füllen Sie bitte zunächst die folgenden vier Kästchen korrekt aus.
- Viel Erfolg!

Nachname, Vorname	Gruppennummer
Matrikelnummer	Vorname des Tutors

Korrektur:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		Σ

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de

A 1. [7 Punkte] Wir betrachten stets den Grenzwert $n \to +\infty$. Entscheiden Sie bei jeder der Folgen

- falls sie konvergent ist, gegen welchen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ sie konvergiert;
- falls sie divergent ist, so tragen Sie bitte ein "**d**" in das entsprechende Kästchen ein.

Folge (x_n) mit	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ oder **d**
$x_n = (-42)^n$	
$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	
$x_n = \frac{2n^2-n}{3n^2+n}$	
$x_n = \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$	
$x_n = \frac{2^n+4^n}{2^n-3^n}$	
$x_n = \frac{5n-6}{2n+2} - \frac{2n^2+6n+6}{(n\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}$	
$x_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+\sqrt{n}}$	

A 2. [4 Punkte] Füllen Sie die Spalten $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ und $\arg z$ der untenstehenden Tabelle zu den folgenden komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ korrekt aus. Dabei ist stets $\arg z \in [0, 2\pi[$ und alle Einträge sind möglichst weit zu vereinfachen.

$z \in \mathbb{C}$	$\operatorname{Re} z$	$\operatorname{Im} z$	$\lvert z\rvert$	$\arg z$
$(\sqrt{2}-2\mathrm{i})(\sqrt{2}+2\mathrm{i})\mathrm{i}$				
$\frac{2+3\mathrm{i}}{-3+2\mathrm{i}}$				
$\sum\limits_{k=1}^{26} \mathrm{i}^k$				
$\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}\right)(3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi})$				

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de

A 3. [4 Punkte] Zeichnen Sie folgende Mengen in **eine gemeinsame** komplexe Zahlenebene und beschriften Sie sowohl die Achsen (auch mit Skala) als auch die eingezeichneten Mengen.

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z = -4 \ \vee \ \operatorname{Im} z = 4\}$,

(b) $M_2 := \bigcup\limits_{k=1}^{3} \left\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z + 2k| \leq \frac{1}{2}\right\}$,

(c) $M_3 := \left\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 3 \ \wedge \ \arg z \notin \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[\right\}$

A 4. [5 Punkte]

(a) Wie lauten die beiden Aussagen des Fundamentalsatzes der Algebra?

Voraussetzungen:

Sei $P \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, d.h. von der Form

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad a_n \neq 0.$$

Erste Aussage:

Zweite Aussage:

(b) Zerlegen Sie das Polynom $P \in \mathbb{C}[x]$, gegeben durch

$$P(z) = z^5 + 10z^3 + 9z,$$

über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren und geben Sie Ihr Ergebnis an.

Zerlegung in Linearfaktoren

$P(z) =$

Sie erhalten Teilpunkte für richtige Linearfaktoren.

A 5. [3.5 Punkte] Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sowie $U \subseteq V$ eine Teilmenge.

(a) Geben Sie **eine** zur Definition von »U ist ein Untervektorraum von V« äquivalente Bedingung des Untervektorraumkriteriums an.

Eine äquivalente Bedingung des Untervektorraumkriteriums

(b) Definieren Sie die lineare Hülle $\mathrm{LH}(U)$ von U.

Definition

$\mathrm{LH}(U) :=$

(c) Sei W ein weiterer $\mathbb{K}$-Vektorraum. Geben Sie eine Definition für die Linearität einer Abbildung $L : V \to W$ an.

Definition

A 6. [3 Punkte] Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden LGS und geben Sie die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{Z}^3$ an:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & - & 6x_3 & = & 10 \\ 6x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \end{array}$$

Lösungsmenge

A 7. [4 Punkte] Lösen Sie diese Aufgabe auf Seite 9 der Klausur. Sie dürfen kein eigenes Papier abgeben.
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie die Äquivalenz

$$\text{Kern}(L) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad L \text{ ist injektiv.}$$

Begründen Sie dabei **jeden Schritt**.

A 8. [4 Punkte] Betrachten Sie $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7z \\ -x - 2y - z \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Geben Sie Kern(A) explizit an. Vereinfachen Sie dabei so weit wie möglich.

$$\boxed{\text{Kern}(A) = \left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}}$$

(b) Bestimmen Sie $\dim \mathrm{Kern}(A)$ und $\dim \mathrm{Bild}(A)$.

$\boxed{\dim \mathrm{Kern}(A) = \qquad}$ $\qquad$ $\boxed{\dim \mathrm{Bild}(A) = \qquad}$

(c) (i) A ist injektiv. . . . . wahr ☐ falsch ☐
(ii) A ist surjektiv. . . . . wahr ☐ falsch ☐
*Bewertungsmaßstab wie immer: jeweils ± 0.5 oder 0 Punkte. Diese werden mit den anderen Teilaufgaben **(a)** und **(b)** verrechnet.*

A 9. [6 Punkte] Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Geben Sie **zwei äquivalente** Bedingungen dafür an, dass eine Teilmenge $M \subseteq V$ linear unabhängig ist.

Eine Bedingung

Eine dazu äquivalente Bedingung

(b) Definieren Sie, wann man eine Teilmenge $B \subseteq V$ Basis (von V) nennt.

Definition

(c) Sei $V = \mathbb{R}^2$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum mit zwei verschiedenen Basen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie zu $v_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ den Vektor v_B und zu $w_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ den Vektor $w_{B'}$.

$v_B = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ $\qquad$ $w_{B'} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

(d) Sei W ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit zwei verschiedenen Basen $B, C \subseteq V$. Seien weiter die zur linearen Abbildung $L : V \to V$ gehörende Matrix $M_L^{B,B}$, sowie die Basiswechselmatrix $M_{\mathrm{Id}_V}^{C,B}$ gegeben. Stellen Sie damit $M_L^{C,C}$ dar.

$M_L^{C,C} =$

A 10. [$11 \cdot 0.5 = 5.5$ Punkte] In dieser Aufgabe sind keinerlei Begründungen gefordert. Es gilt der Bewertungsmaßstab der Kurztests.

Sei stets $\mathbb{K}$ ein Körper. Seien V und W jeweils $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $L : V \to W$ linear. Bezeichne $\mathbb{R}^{n\times m}$ den Raum der reellen $n \times m$-Matrizen und seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen.

(a) Sind (a_n) und (b_n) divergent, dann auch $(a_n b_n)$. .... wahr ☐ falsch ☐

(b) Sind (a_n) und (b_n) konvergent, dann auch $(a_n - b_n)$. .... wahr ☐ falsch ☐

(c) Sei $z = re^{i\varphi}$ mit $\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4}$ und $r > 0$. Dann ist $\operatorname{Im} z > 0$. .. wahr ☐ falsch ☐

(d) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Die Gleichung $z^5 = z_0$ hat mindestens eine reelle Lösung. .... wahr ☐ falsch ☐

(e) Ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat über $\mathbb{C}$ höchstens n Nullstellen. .... wahr ☐ falsch ☐

(f) Sei $M \subseteq V$ mit $\#M = n$, dann ist $\dim \mathrm{LH}(M) = n$. .... wahr ☐ falsch ☐

(g) $\mathrm{Kern}\, L$ ist ein Untervektorraum von W. .... wahr ☐ falsch ☐

(h) $\mathrm{Bild}\, L$ ist ein Untervektorraum von W. .... wahr ☐ falsch ☐

(i) Ist $\mathrm{Bild}\, L = W$, so folgt stets $\mathrm{Kern}\, L = \{0\}$. .... wahr ☐ falsch ☐

(j) Jede Basiswechselmatrix ist invertierbar. .... wahr ☐ falsch ☐

(k) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ invertierbar, so ist $n = m$. .... wahr ☐ falsch ☐

Z 11. Zusatzaufgabe [1 Punkte] Sei $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$ der Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ der Vektorraum über $\mathbb{C}$. Geben Sie jeweils eine Basis B von $V_{\mathbb{R}}$ und eine Basis C von $V_{\mathbb{C}}$ an.

$B = \left\{ \qquad \right\}$ $C = \left\{ \qquad \right\}$

Lösung zu A 7.

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de robin.lang@mathematik.uni-stuttgart.de