D. Merkt **Vortragsübungen 6** WS 18/19

Besprechung am 29.11.18

Aufgabe V 23: *Grenzwerte von Folgen*

Bestimmen Sie den Grenzwert bzw. die Divergenz

23.1 $a_n = \dfrac{2n+3-2n^2}{2n+3n^2+2}$ **23.2** $b_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ **23.3** $c_n = \sqrt{n^2+3n+1}-n$

23.4 $d_n = \dfrac{2+n+2n\,\mathrm{i}}{n-2\,\mathrm{i}}$ **23.5** $e_n = \dfrac{\mathrm{i}^n}{n}$ **23.6** $f_n = \dfrac{2^{n+1}+2}{3^n+2^n}$

Aufgabe V 24: *Konvergenz von Folgen*

Untersuchen Sie die Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

auf Monotonie und Beschränktheit.
Falls die Folge konvergent ist, dann bestimmen Sie den Grenzwert.

Gegeben sind die Abbildungen

$$f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ x \mapsto x \to x\sin(2x)$$

$$f_2 \colon [1, \infty[\to [1, \infty[\ : \ x \mapsto (x-1)^2 + 1$$

a) Begründen Sie, warum f_1 nicht injektiv ist.

b) Geben Sie die Abbildung $f_1 \circ f_2$ an.

c) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung f_2^{-1}

WS 2010

Aufgabe 8 (4 Punkte)

a) Geben Sie den binomischen Satz an: Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a+b)^n \ = \boxed{}$$

b) Folgern Sie aus dem binomischen Satz: Für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n > \dfrac{n(n-1)}{2}\, x^2$:

WS 2010

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion auf einem extra Blatt: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \ = \ 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

WS 2007

Aufgabe 6 (2 Punkte)**:** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Definition der Aussage „(a_n) ist konvergent gegen a" an.

Geben Sie die Negation dieser Definition an:

WS 2010

Aufgabe 9 (4 Punkte)

a) Es sei $(\mathbb{K}, |\ |)$ ein bewerteter Körper, $a \in \mathbb{K}$ und (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$. Geben Sie die Definition der Aussage $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ an:

b) Beweisen Sie: In $(\mathbb{R}, |\ |)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+5}{n+3} = 2$:

WS 2007

Aufgabe 8 (6 Punkte)**:** Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Gegeben sind die vier Aussagen

$A:$ (a_n) ist konvergent, $B:$ (a_n) ist monoton und beschränkt,

$C:$ (a_n) ist eine Cauchy–Folge, $D:$ (a_n) ist beschränkt.

Geben Sie an, ob die in der Tabelle genannten Implikationen wahr sind (J für „ja", N für „nein").

	A	B	C	D
Wenn A gilt, dann gilt auch	J			
Wenn B gilt, dann gilt auch		J		
Wenn C gilt, dann gilt auch			J	
Wenn D gilt, dann gilt auch				J

WS 2007

Aufgabe 12 (3 Punkte)**:** Es sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper und $|.| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Geben Sie an, welche drei Eigenschaften erfüllt sein müssen, damit $(\mathbb{K}, +, \cdot, |.|)$ ein bewerteter Körper ist. (Die Reihenfolge ist egal, die Bezeichnungen (B1), (B2), (B3) dienen nur zu Ihrer Orientierung)

(B1)	
(B2)	
(B3)	

WS 2007

Aufgabe 2 (6 Punkte)**:** Untersuchen Sie, ob folgende Mengen Supremum, Infimum, Maximum oder Minimum besitzen. Geben Sie gegebenenfalls die Werte an bzw. tragen Sie N für „nicht existent“ ein:

M	Sup M	Inf M	Max M	Min M
$\left\{-1+\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$				
$]0,1] \ \cup \ [1,\infty[$				
$]0,2[\cap [1,3]$				