Besprechung am 17.01.19

Aufgabe V 36: *Lineare Abbildungen und Basiswechsel*

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

36.1 Versuchen Sie eine geometrische Interpretation dieser Abbildung zu geben, indem Sie verschiedene Vektoren Ihrer Wahl abbilden.

36.2 Gesucht ist nun die darstellende Matrix (bezüglich Standardbasen) einer Spiegelung an der Geraden $\mathrm{LH}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}\right)$ (dies ist eine lineare Abbildung). Führen Sie dazu einen geeigneten Basiswechsel durch.

Veranschaulichen Sie ihre Überlegungen graphisch.

Aufgabe V 37: *Inverse Matrix und Gaußalgorithmus*

Berechnen Sie, falls möglich, die Inversen der folgenden Matrizen

37.1 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **37.2** $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ **37.1** $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe V 38: *Skalarprodukt*

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_a : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon\ \langle x,y\rangle_a = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$$
$$\langle\cdot,\cdot\rangle_b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon\ \langle x,y\rangle_b = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$$

38.1 Überprüfen Sie, ob es sich bei den Abbildungen $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_b$ um ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ handelt.

38.2 Zeigen Sie, dass die Vektoren $v = (1,0)^{\mathrm{T}}$ und $w = (0,1)^{\mathrm{T}}$ bezüglich des Standardskalarprodukts eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bilden. Zeigen Sie weiter, dass dies bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$ nicht der Fall ist.

38.3 Zeigen Sie, dass die Vektoren $v' = (1,1)^{\mathrm{T}}$ und $w' = (1,-1)^{\mathrm{T}}$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$ orthogonal zueinander sind und bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\alpha \cdot v'$ und $\beta \cdot w'$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$ bilden.