D. Merkt **Vortragsübungen 12** WS 18/19

Besprechung am 24.01.19

Aufgaben aus alten Scheinklausuren

WS 2010

Gegeben sind die Basen

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^2$ sowie die durch

$$M_L^{C,B} := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie:

$$M_{\mathrm{Id}}^{E_2,C} = \boxed{}\,, \quad M_{\mathrm{Id}}^{B,E_2} = \boxed{}\,, \quad M_L^{E_2,E_2} = \boxed{}$$

WS 2010

Geben Sie die inverse Matrix zu M an:

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \boxed{}$$

WS 2007

Aufgabe 3 (5 Punkte)**:** Es seien V, W Vektorräume über $\mathbb{C}$ und $L : V \to W$ linear.

a) Geben Sie die Definition des Kerns von L an:

Kern(L) =

b) Beweisen Sie, dass der Kern von L ein Untervektorraum von V ist:

WS 2007

Aufgabe 5 (7 Punkte)**:** Es seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{C}$ mit Basen B_V, B_W. Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr sind (J für „ja“, N für „nein“).

Aussage	ist wahr
$V = \mathrm{LH}\{v_1, \ldots, v_n\} \Rightarrow \dim(V) = n$	
$V = \mathrm{LH}\{v_1, \ldots, v_n\} \Rightarrow \dim(V) \leq n$	
$V = \mathrm{LH}\{v_1, \ldots, v_n\} \Rightarrow \dim(V) \geq n$	
$L : V \to W$ linear und surjektiv $\Rightarrow \dim(W) = \dim(V)$	
$L : V \to W$ linear und injektiv $\Rightarrow \dim(W) = \dim(V)$	
$L : V \to W$ linear und bijektiv $\Rightarrow \dim(W) = \dim(V)$	
$L : V \to W$ und $\mathrm{Bild}(L) = W \Rightarrow L$ ist surjektiv	
$L : V \to W$ und $\mathrm{Bild}(L) = W \Rightarrow L$ ist injektiv	
Ist $L : V \to W$ linear und $\dim(W) = l$, so hat $M_L^{B_W, B_V}$ l Zeilen	
Ist $L : V \to W$ linear und $\dim(W) = l$, so hat $M_L^{B_W, B_V}$ l Spalten	
Jede Basiswechselmatrix ist quadratisch	
Jede Basiswechselmatrix ist invertierbar	

WS 2007

Aufgabe 2 (3 Punkte)**:** Gegeben sei eine relle 3×3-Matrix A und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Geben Sie an, welche der folgenden Abbildungen linear sind (J für „ja“, N für „nein“).

Abbildung	L ist linear
$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto A^3\, x$	
$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto A\, x + b$	
$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto A^2\, x + \langle x, b\rangle \cdot b$	

WS 2010 (SK1)

Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil der folgenden Zahlen:

	Re z	Im z
$z = \lvert 1-2\mathrm{i}\rvert \cdot \overline{(2+\mathrm{i})}$		
$z = \dfrac{5+5\mathrm{i}}{\mathrm{i}-3}$		
$z = \mathrm{Im}\,(1+2\mathrm{i}) - \mathrm{Re}\,(3-\mathrm{i})$		
$z = (5+3\mathrm{i}) - (7-6\mathrm{i})$		

WS 2010 (SK1)

Geben Sie an, ob die nachstehend definierten Folgen (a_n) konvergent sind (J für „ja“, N für „nein“), und tragen Sie for jede konvergente Folge ihren Grenzwert in die letzte Spalte ein.

	ist konvergent	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
$a_n = \mathrm{i}^n$		
$a_n = \dfrac{5^n + 4^n\mathrm{i}}{4^n + 5^n\mathrm{i}}$		
$a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^k$		
$a_n = \dfrac{2n - n^3\mathrm{i}}{5 - 6n^2}$		

WS 2007

Aufgabe 7 (6 Punkte)**:** Es seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{C}$.

a) Es sei $L : V \to W$ linear. Geben Sie die Dimensionsformel an:

b) Es sei $L : V \to W$ linear und injektiv. Geben Sie den Kern von L explizit an:

Kern(L) =

c) Nun sei $L : V \to V$, d.h. L bildet V in sich ab. Beweisen Sie mit Hilfe Ihrer Angabe in b) und der Dimensionsformel, dass L surjektiv ist.

WS 2010

a) Es seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Geben Sie die Dimensionsformel an:

b) Im Folgenden seien $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, und $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ bezeichne die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Außerdem sei eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$L(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad L(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad L(e_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das Bild von L und geben Sie den Rang von L an:

Bild(L)= $\boxed{}$, Rang(L)= $\boxed{}$.

b) Bestimmen Sie den Kern von L und geben Sie seine Dimension an:

Kern(L)= $\boxed{}$, dim(Kern(L))= $\boxed{}$.

c) Die Dimensionsformel für L mit konkreten Zahlen lautet $\boxed{} = \boxed{} + \boxed{}$.

WS 2010

Gegeben ist das Polynom $p(x) = x^4 - 2x^3 - 8x - 16$. Eine Nullstelle ist $x = 2\mathrm{i}$. Bestimmen Sie die komplexe Faktorisierung von p in Linearfaktoren und die reelle Zerlegung von p in Polynome möglichst geringer Ordnung:

Komplexe Faktorisierung:	$p(x) =$
Reelle Zerlegung:	$p(x) =$

WS 2010

a) Berechnen Sie $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2011}$ in der Form $x+\mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$: $\boxed{}$.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -8\mathrm{i}$ in der Form $re^{\mathrm{i}\varphi}$, $r \in [0, \infty[$, $\varphi \in [0, 2\pi[$:

$\boxed{}$.

WS 2010

Gegeben ist das vom reellen Parameter t abhängige lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & tx_2 & = & -1 \\ 2tx_1 & + & x_2 & = & 1 \end{array}\right\} (*)$$

a) $(*)$ besitzt für $t = \boxed{}$ keine Lösung.

b) $(*)$ besitzt für $t = \boxed{}$ unendlich viele Lösungen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{}$

c) $(*)$ besitzt für $t \neq \boxed{}$ genau eine Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{}$