4 KONVERGENZ

4.1 Abstände

Rep Kap: Für $x, y \in \mathbb{K}$ def.

$d(x,y) := |x-y|$ den

Abstand von x u. y.

(i) in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $d(x,y) = |x-y|$

(ii) in $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $d(x,y) = |x-y|_{\mathbb{C}} = \sqrt{\operatorname{Re}(x-y)^2 + \operatorname{Im}(x-y)^2}$

4.1 Def Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abb $d : M \times M \to \mathbb{R}$ heißt **Metrik** (**Abstand**) auf M, falls $\forall x, y, z \in M$

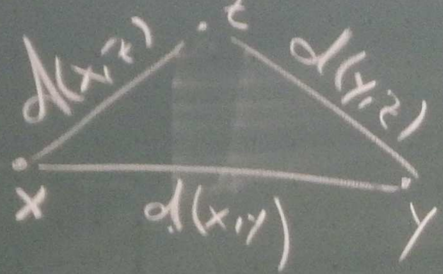
(M1) $d(x,y) \geq 0 \wedge (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Man bez. (M,d) als **metrischen Raum**.

Anm zu (M3)



$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\tilde{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

4.2 Satz Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein norm. VR. Dann ist

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

eine Metrik auf V.

Sie heißt von $\|\,\|$ induziert.

4.3 Bsp 1) $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, s. oben.

2) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$).

Nach 3.49 (Norm) definieren

(i) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 7$

(ii) $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} = 5$

(iii) $d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$

(iv) $d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = 4$

$$d_1(\tilde{x},\tilde{y}) = |\tilde{x}_1 - \tilde{y}_1| + |\tilde{x}_2 - \tilde{y}_2|$$
$$= |1-(-3)| + |5-2|$$
$$= 4 + 3 = 7$$

---

3) $M_{n,n} = \mathbb{C}^{n\times n} = \left\{ (a_{ij})_{i=1\dots n}^{j=1\dots n} : a_{ij}\in\mathbb{C} \right\}$

ist mit

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij})$$
$$\lambda \cdot A = \lambda\,(a_{ij}) := (\lambda a_{ij})$$
$\mathbb{C}$
$$A \cdot B = (a_{ij}) \cdot (b_{ij}) := \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}\right)_{ij}$$

ein VR Durch

$$\|A\| := n \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|_{\mathbb{C}}$$

Wird auf V eine Norm und durch

$$d(A,B) := \|A - B\|$$

nach Satz 4.2 eine Metrik def.

<u>Anm</u> Wegen

$$\|A\cdot B\| = \left\| \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}\right)_{ij} \right\|$$
$$\overset{\text{Def}}{=} n \max_{1\le i,j\le n} \left| \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j} \right|$$
$$\le n \cdot n \max_{1\le i,j\le n} |a_{i\ell}\, b_{\ell j}|$$
$$\le n \cdot \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| \cdot \max_{1\le i,j\le n} |b_{ij}| \cdot n$$
$$= \|A\| \cdot \|B\|$$

folgt $\|A^2\| \le \|A\|^2$

und allg. $\|A^k\| \le \|A\|^k \quad \forall_{k \ge 1}$

4) Sei $M \neq \emptyset$ und für $x,y \in M$

heißt $d(x,y) = \begin{cases} 1 , & x \neq y \\ 0 , & x = y \end{cases}$

Trivialmetrik.

Satz 4.6 (Umgek. Δ-Ugl)

Sei (M,d) m.R., dann

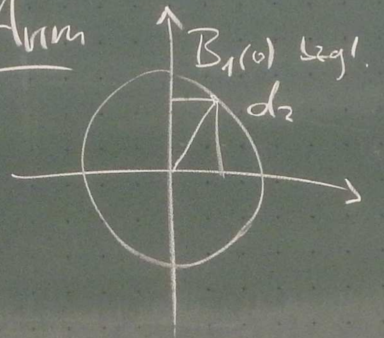
$\forall_{x,y,z} \quad d(x,y) \ge |d(x,z) - d(z,y)|$

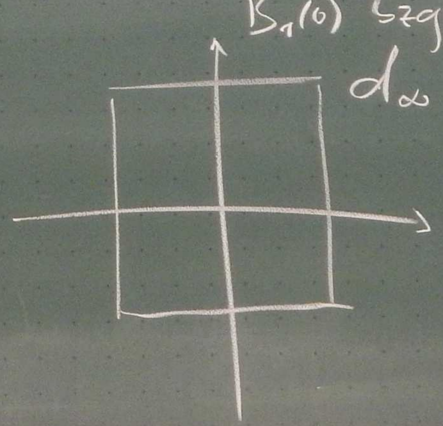
4.5 Def Sei (M,d) m.R. Zu $x_0 \in M$ und $0 < R < \infty$ heißt

$$B_R(x_0) := \{x \in M : d(x,x_0) < R\}$$

offene Kugel (mit Mittelpkt x_0 und Radius R)

Anm





4.2 FOLGEN

Bisher $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x \iff \forall_{\varepsilon>0} \exists N_\varepsilon \forall_{n \geq N_\varepsilon} |x_n - x| < \varepsilon$

4.6 Konvergenz Sei (M, d) m.R. und (x_n) eine Folge in M

1) (x_n) heißt konvergent gegen x

$:\iff \forall_{\varepsilon>0} \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall_{n \geq N_\varepsilon} \; d(x_n, x) < \varepsilon$

Schreibe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $x_n \xrightarrow{d} x \; (n \to \infty)$.

x heißt Grenzwert von (x_n).

2) (x_n) heißt konvergent, falls

$\exists x \in M : x = \lim_{n\to\infty} x_n$

3) (x_n) heißt Cauchy-Folge

$:\iff \forall_{\varepsilon>0} \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall_{n,m \geq N_\varepsilon} \; d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$(x_n) \in CF(M)$

4.7 Satz & Def.

1) (x_n) konvergent $\Rightarrow (x_n) \in CF(M)$

2) Gilt $(x_n) \in CF(M) \Rightarrow (x_n)$ konv.,

so heißt (M, d) vollständig.

M — " — bzgl. d.

Anm

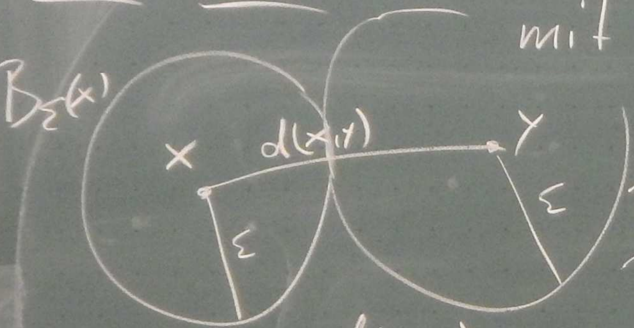
$\mathbb{Q} \ni \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{(n\to\infty)} e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

4.8 Satz (Eindeutigkeit d. GW)

Ist (x_n) konv, so ist ihr GW eindeutig.

Bew GA $x_n \to x \wedge x_n \to y$

mit $x \neq y$.



$B_\varepsilon(y)$

$B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$

Sei $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$

- $x_n \to x \Rightarrow \exists N_{\varepsilon,x} \; \forall n > N_{\varepsilon,x} \; d(x_n,x) < \varepsilon$
- $y_n \to y \Rightarrow \exists N_{\varepsilon,y} \; \forall n > N_{\varepsilon,y} \; d(x_n,y) < \varepsilon$

Betrachte

$$\underline{d(x,y)} \overset{\Delta}{\leq} d(x,x_n) + d(x_n,y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \underline{d(x,y)}$$

für $n > N_\varepsilon := \max\{N_{\varepsilon,x}, N_{\varepsilon,y}\}$ ↯ □

Bsp 1) $\mathbb{Q}$ mit $d(x,y) = |x-y|_{\mathbb{R}}$ nicht vollst

2) $\mathbb{R}$ mit d wie in 1) ist vollst [2.30]

3) $\mathbb{C}$ mit $d_{\mathbb{C}}$ vollst

Bew (x_n) konv. in $\mathbb{C} \Leftrightarrow (\mathrm{Re}\, x_n), (\mathrm{Im}\, x_n)$ konv. in $\mathbb{R}$

$\overset{!}{\Leftrightarrow} (\mathrm{Re}\, x_n), (\mathrm{Im}\, x_n) \in CF(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow (x_n) \in CF(\mathbb{C})$. $\square$

4) $\mathbb{C}^d$, $d \in \mathbb{N}$, mit $d_\infty(x,y) := \max_{1\le i\le d} |x_i - y_i|$ ist vollst.

<u>Bew</u> $x \in \mathbb{C}^d \rightsquigarrow x = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(d)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^d$

$x_n \in \mathbb{C}^d \rightsquigarrow x_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(d)} \end{pmatrix}$

Damit ist $(x_n) \in CF(\mathbb{C}^d)$ bzgl. d_∞!

$\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{N_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{n,m \ge N_\varepsilon}$

$$\max_{1\le i\le d} |x_n^{(i)} - x_m^{(i)}| < \varepsilon$$

Dann gilt $n,m \ge N_\varepsilon$

$\forall i \in \{1,\dots,d\} \quad |x_n^{(i)} - x_m^{(i)}| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall i \in \{1,\dots,d\}$ ist $(x_n^{(i)})_n \in CF(\mathbb{C})$

$\overset{3)}{\Leftrightarrow}$ — " — $\exists x^{(i)} \in \mathbb{C}: x_n^{(i)} \xrightarrow{(n\to\infty)} x^{(i)}$

Def. $x_0 := \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(d)} \end{pmatrix}$, dann folgt

$\in \mathbb{C}$

$$d_\infty(x_n, x_0) = \max_{1\le i\le d} |x_n^{(i)} - x_0^{(i)}| < \varepsilon$$

nach Konstr.

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{d_\infty} x_0 \; (n \to \infty)$.

5) $V = \mathbb{C}^{n\times n}$ mit d wie vorhin ist vollst. [wie 4)]

Ferner ist wegen $\|A^k\| \leq \|A\|^k$

$\|A\| < 1 \Rightarrow d(\underset{\underset{x_n}{\shortparallel}}{A^n}, 0) = \|A^n - 0\| \leq \|A\|^n \longrightarrow 0$

Anm zu 1) Heron-Verfahren:

$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)}_{\in \mathbb{Q}}$

$\downarrow$

(*) $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \Leftrightarrow a^2 = 2$

4.10 Def Gilt für die reelle Folge (a_n)

$\forall M > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ a_n > M$

oder

$\forall M > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ a_n < -M$,

so heißt (a_n) bestimmt divergent, schreibe

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $a_n \to \infty$

bzw.

$\lim a_n = -\infty$ oder $a_n \to -\infty$

Bsp 1) $a_n = n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

2) $a_n = -n^{\frac{1}{1000}} = -\sqrt[1000]{n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

3) $a_n = (-1)^n$ ist divergent

aber nicht bestimmt

divergent.

Satz $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Bew Ang. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \exists\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ vollst. gekürzt.

$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$

$2 | 2q^2$

$\Rightarrow 2 | p^2 \Rightarrow \boxed{2 | p}$

$2 \mid p \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Z} : p = 2r$

$\sqrt{2} = \frac{2r}{q} \Rightarrow 2 = \frac{4r^2}{q^2} \Rightarrow q^2 = 2r^2$

$\Rightarrow 2 \mid q^2 \Rightarrow \boxed{2 \mid q}$ $\lightning$