4.3 Reihen

4.12 Def: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge im $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$.

1) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wobei $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = (s_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

Die Folgenglieder a_k heißen Summanden der Reihe.

Reihen sind nur eine andere Schreibweise für Folgen:

z.B. $a_k = q^k$, $q \neq 1$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

Umgekehrt: $x_n := 1 - \frac{1}{n+1}$

Definiere $a_0 := x_0 = 0$

$$a_1 := x_1 - x_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$a_2 := x_2 - x_1 = 1 - \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$\vdots$

$a_k := x_k - x_{k-1} = 1 - \frac{1}{k+1} - \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

$= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

$\Rightarrow x_n = \underbrace{x_0}_{=a_0} + \underbrace{x_1 - x_0}_{=a_1} + \underbrace{x_2 - x_1}_{=a_2} + \ldots + \underbrace{x_n - x_{n-1}}_{=a_n}$

$= \sum_{k=0}^{n} a_k$

Also: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

4.12 Fortsetzung: 2) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt <u>konvergent</u>, falls (s_n) konvergiert, sonst <u>divergent</u>.

3) Falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, schreibt man

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Achtung: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet zwei verschiedene Dinge: (i) Teilsummenfolge (s_n)

(ii) Grenzwert der Teilsummenfolge

z.B.: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

falls $|q| < 1$.

Für $|q| \ge 1$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergent

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1 = (n+1)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist divergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(1+k)} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

4) Eine reelle Reihe heißt <u>bestimmt divergent</u>, falls (s_n) bestimmt divergent ist. Schreibe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty \text{ oder } = -\infty.$$

z.B.: $\sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(-2^k\right) = -\infty$$

5) Genauso für $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ mit $k_0 \in \mathbb{Z}$.

<u>4.13 Bem</u>: Jede Folge kann als Reihe geschrieben werden und umgekehrt.

<u>4.14 Beispiele</u>: 1) $q \in \mathbb{R}$, $q \ge 1$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \ge \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \to \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \infty$$

3) Dezimalbrüche: $\pi = 3{,}14159\ldots$ bedeutet:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} \text{ mit } a_0 = 3, a_1 = 1, a_2 = 4, \ldots$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k} \Rightarrow \begin{cases} s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \cdot 10^{-(n+1)} \ge 0 \\ s_n \le \sum_{k=0}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = 9 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9\,\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Rightarrow s_n \le \cancel{9} \cdot \dfrac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{\cancel{\frac{9}{10}}}\,10 \le 10(1-0) = 10 \\ \Rightarrow \begin{cases} (s_n) \text{ mon wachsend} \\ (s_n) \text{ beschränkt} \end{cases} \Rightarrow (s_n) \text{ ist konv.} \end{array}}$$

2) Wichtigste divergente Reihe: **Harmonische** Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$:

$$\underbrace{\frac{1}{m+1}}_{\geq \frac{1}{2m}} + \underbrace{\frac{1}{m+2}}_{\geq \frac{1}{2m}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{m+m}}_{= \frac{1}{2m}} \geq \frac{1}{2m} \cdot m = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow s_{2^{N+1}} = \underbrace{1}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\substack{\geq \frac{1}{2} \\ (m=2)}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\substack{\geq \frac{1}{2} \\ (m=4)}} + \dots$$

$$\dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^N+1} \; \dots\dots \; + \frac{1}{2 \cdot 2^N}\right)}_{\substack{\geq \frac{1}{2} \\ (m=2^N)}}$$

$$\Rightarrow s_{2^{N+1}} \geq 1 + \frac{1}{2} \cdot (N+1) \to \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Sehr langsame Divergenz: $s_{10000} = 9{,}7\dots$

4.15 Elementare Eigenschaften: 1) Sind $\sum a_k$, $\sum b_k$ konvergent, $\lambda \in \mathbb{K}$, dann sind auch $\sum (a_k + b_k)$, $\sum \lambda \cdot a_k$ konvergent mit

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \\ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda \cdot a_k &= \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k \end{aligned}\right\} \text{siehe Rechenregeln für konv. Folgen}$$

2) Cauchy-Kriterium: Ist $\sum a_k$ Reihe in einem vollst. Vektorraum, so ist sie genau dann konv., wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall m > n > N_\varepsilon : \underbrace{\left\| \sum_{k=n}^{m} a_k \right\|}_{\| s_m - s_n \|} < \varepsilon$$

d.h. (s_n) ist Cauchy-Folge

3) $a_k = b_k$ für $k \geq K_0$, dann

$$\sum a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum b_k \text{ konv.}$$

(die Grenzwerte können verschieden sein)

4) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konv. $\Rightarrow$ $a_k \to 0$ für $k \to \infty$

$\|a_k\| = \|s_{k+1} - s_k\| < \varepsilon$ für $k > K_\varepsilon$ nach Cauchy

Umkehrung gilt nicht: $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k \to 0} = \infty$

$\Rightarrow$ Nullfolge-Kriterium (Kontraposition)

a_k keine Nullfolge $\Rightarrow$ $\sum a_k$ ist divergent

5) Gilt $a_k \in \mathbb{R}$ und $a_k \geq 0$ für $k \in \mathbb{N}$ und sind die Partialsummen beschränkt:

$$\exists K \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} : s_n \leq K$$

Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

$s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0 \Rightarrow (s_n)$ beschränkt und monoton

4.4 Konvergenzkriterien:

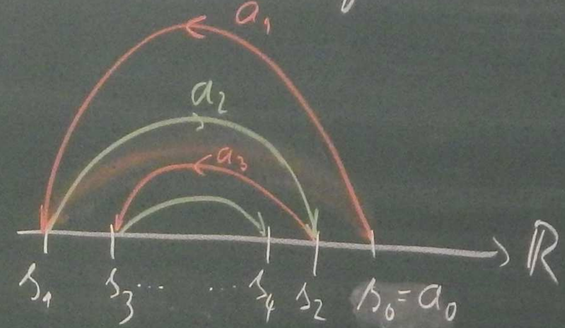
4.16 Leibniz-Kriterium: Sei (a_k) eine

- positive (d.h. $a_k \geq 0$)
- monoton fallende ($a_{k+1} \leq a_k$)
- Nullfolge ($a_k \to 0$)

Dann ist die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent (in $\mathbb{R}$) und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$

Veranschaulichung



(s_{2n+1}) mon. wachsend und beschränkt

(s_{2n}) mon. fallend " "

$|s_{2n+1} - s_n| = a_{n+1} \to 0$

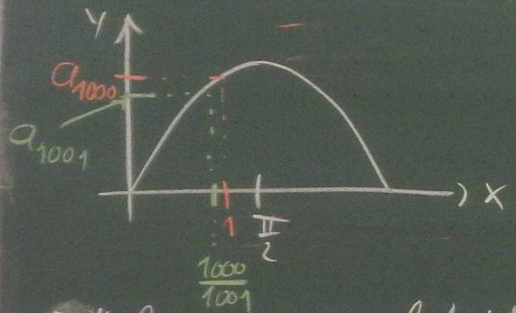
4.17 Beispiele: 1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{1/1000}}$ ist konv. nach Leibniz.

$$a_k = \frac{1}{k^{1/1000}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{k+1} \leq a_k \\ a_k \to 0 \\ a_k \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \sin\left(\frac{1000}{k}\right)$$

$a_k = \sin\left(\frac{1000}{k}\right)$ kann negativ werden

Für $k \geq 1000$:



Für $k \geq 1000$ sind die Voraussetzungen für Leibniz erfüllt: $a_k = \sin\left(\frac{1000}{k}\right) \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1000}{k+1} \leq \frac{1000}{k} \overset{\sin \text{ monoton}}{\Longrightarrow} a_{k+1} \leq a_k \\ \frac{1000}{k} \to 0 \Longrightarrow a_k \to 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow} \text{Konvergenz}$$

4.18 Def: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|$ konvergiert.

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konv., so heißt sie bedingt konvergent.

4.19 Beisp: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ ist nach Leibniz konv., aber $\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k \cdot \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=1} \frac{1}{k}$ ist divergent.

Für $|z| < 1$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ absolut konvergent

4.20 Satz: In jedem vollständigen normierten Vektorraum ist jede absolut konv. Reihe auch konvergent.